Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos

Volumen 1: Temas básicos

Dorian Luis Linero Segrera
Profesor Asociado
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Diego Alexander Garzón Alvarado
Profesor Titular
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia



Bogotá, noviembre de 2016

Índice

Capítulo 1
Conceptos generales

Este capítulo presenta el concepto de mecánica del medio continuo y los elementos matemáticos necesarios para su descripción (Malvern 1969; Spencer 1990; Mase & Mase 1999; Goicolea 2002; Romero 2004; Wu 2005). Se incluyen temas del algebra de matrices, vectores y tensores encaminados a la definición de las entidades físicas que serán estudiadas en los siguientes capítulos. Asimismo, se introduce las notaciones indicial y compacta para describir cantidades vectoriales y tensoriales.

1.1. Concepto de Mecánica del Medio Continuo

La mecánica del medio continuo o simplemente mecánica del continuo estudia el comportamiento mecánico de los sólidos y los fluidos en una escala macroscópica, ignorando la naturaleza discontinua del material, el cual se considera uniformemente distribuido en la totalidad del cuerpo.

En la mecánica del continuo, una *partícula* de material se asocia a un punto del espacio ocupado por el cuerpo, al cual se le pueden atribuir cantidades de campo como la densidad, el desplazamiento y la velocidad entre otras. Dichas cantidades corresponden a funciones continuas en términos de la posición.

La mecánica es la ciencia que describe la interacción entre la fuerza y el movimiento. En consecuencia, las variables presentes en la mecánica del continuo son, por un lado, las variables relacionadas con las acciones como las fuerzas por unidad de superficie o de volumen, y por otro lado,

las variables cinemáticas como el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Las ecuaciones de la mecánica del continuo se pueden clasificar en dos grupos. El primer grupo corresponde a las ecuaciones aplicables a todos los materiales que describen las leyes universales de la física, como por ejemplo, la conservación de la masa y la conservación de la energía. Las expresiones del segundo grupo conocidas como *ecuaciones constitutivas* describen el comportamiento mecánico de los materiales en situaciones interesantes para la ingeniería o para la física.

En los problemas de la mecánica del continuo se observan dos etapas. La primera establece la formulación de las ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento mecánico de los materiales. Mientras que la segunda etapa resuelve la ecuación constitutiva en conjunto con las ecuaciones generales de la mecánica del continuo, bajo las condiciones de borde apropiadas.

1.2. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos o coeficientes organizados en filas y columnas, que pueden describir un grupo de ecuaciones de forma simultánea asociadas a operaciones como suma, multiplicación y derivación entre otras.

En este libro las matrices se denotan mediante una letra negrita entre corchetes y sus coeficientes se representan con la misma letra cursiva acompañada de dos subíndices que indican su posición en el interior de la matriz. El primer subíndice define el número de la fila y el segundo el número de la columna, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Las dimensiones de una matriz están dadas por la cantidad de filas y de columnas que la componen, por ejemplo la matriz $[\mathbf{A}]$ indicada en la expresión anterior tiene m filas por n columnas, es decir sus dimensiones son $m \times n$.

A continuación se indican brevemente algunas de las propiedades y operaciones básicas de las matrices, útiles en el contexto de la mecánica del medio continuo.

- *Suma de matrices.* Sean $[\mathbf{A}]_{m\times n}$ y $[\mathbf{B}]_{m\times n}$ dos matrices del mismo tamaño, se define la matriz $[\mathbf{C}]=[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ como la suma de ellas obtenida de la adición término a término de sus coeficientes, es decir $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$. Esta operación matricial cumple con la propiedad conmutativa de tal manera que $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]=[\mathbf{B}]+[\mathbf{A}]$.

- *Multiplicación de una matriz por un escalar*. Sea λ una cantidad escalar y $[\mathbf{A}]_{m\times n}$ una matriz, el producto entre ambos $[\mathbf{C}]=\lambda[\mathbf{A}]$ es igual a la multiplicación de cada coeficiente de la matriz con el escalar, es decir $C_{ij}=\lambda A_{ij}$.

- *Multiplicación de matrices.* Sean las matrices $[\mathbf{A}]_{m\times p}$ y $[\mathbf{B}]_{p\times n}$ denominadas pre-multiplicador y post-multiplicador respectivamente, cuyo número de columnas *p* del pre-multiplicador es igual al número de filas del post-multiplicador. Se define la matriz $[\mathbf{C}]=[\mathbf{A}][\mathbf{B}]$ como el resultado de la multiplicación matricial entre ellas obtenido de la forma $C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}B_{kj}$. Esta operación matricial no cumple con la propiedad conmutativa en general, es decir si las matrices fuesen cuadradas $[\mathbf{A}][\mathbf{B}]\neq[\mathbf{B}][\mathbf{A}]$.

- *Matriz cuadrada*. Se define como matriz cuadrada a aquella que tiene el mismo número de filas y de columnas, es decir a toda matriz $[\mathbf{A}]$ de dimensiones $m\times m$.

- *Matriz columna*. Se define como aquella matriz que tiene *m* número de filas y una sola columna, la cual se indica de la forma $[\mathbf{A}]_{m\times 1}$.

- *Matriz fila*. Se define como aquella matriz que tiene una sola fila y *n* número de columnas, la cual se indica de la forma $[\mathbf{A}]_{1\times n}$.

- *Matriz transpuesta*. Sea una matriz $[\mathbf{A}]_{m\times n}$ de coeficientes A_{ij} y dimensiones $m\times n$, la matriz transpuesta de $[\mathbf{A}]$ indicada como $[\mathbf{A}]^{T}_{n\times m}$ es una matriz de *n* filas por *m* columnas cuyos coeficientes son $A^{T}_{ij}=A_{ji}$.

- *Matriz simétrica*. Dada una matriz cuadrada $[\mathbf{A}]_{m\times m}$, aquella que cumple que $[\mathbf{A}]=[\mathbf{A}]^T$ es decir, $A_{ij}=A_{ji}$ es una matriz simétrica.

- *Matriz anti – simétrica*. Dada una matriz cuadrada $[\mathbf{A}]_{m\times m}$, aquella que cumple que $[\mathbf{A}]=-[\mathbf{A}]^T$ es decir, $A_{ij}=-A_{ji}$ es una matriz anti – simétrica. Se observa que los coeficientes de la diagonal principal de dicha matriz deben ser iguales a cero.

- *Matriz identidad*. La matriz identidad $[\mathbf{I}]_{m\times m}$ es aquella matriz cuadrada de tamaño *m* cuyos coeficientes de la diagonal principal son iguales a 1 y los demás son iguales a 0. Dadas las matrices $[\mathbf{A}]_{m\times n}$ y $[\mathbf{B}]_{n\times m}$, la matriz identidad tiene como propiedad que: $[\mathbf{I}]_{m\times m}[\mathbf{A}]_{m\times n}=[\mathbf{A}]_{m\times n}$ y $[\mathbf{B}]_{n\times m}[\mathbf{I}]_{m\times m}=[\mathbf{B}]_{n\times m}$.

- *Matriz inversa*. Sean $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ dos matrices cuadradas del mismo tamaño, si el producto entre ellas es igual a la matriz identidad, es decir $[\mathbf{B}][\mathbf{A}]=[\mathbf{I}]$, la matriz $[\mathbf{B}]$ es la matriz inversa de $[\mathbf{A}]$ y se designa como $[\mathbf{A}]^{-1}$. En general se cumple que $[\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{A}]=[\mathbf{A}][\mathbf{A}]^{-1}=[\mathbf{I}]$.

- *Matriz ortogonal*. Una matriz cuadrada $[\mathbf{A}]$ es ortogonal si su inversa es igual a su transpuesta, es decir si $[\mathbf{A}]^{-1}=[\mathbf{A}]^T$. Por lo tanto $[\mathbf{A}][\mathbf{A}]^T=[\mathbf{I}]$ y $[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}]=[\mathbf{I}]$.

- *Determinante de una matriz*. Dada una matriz cuadrada $[\mathbf{A}]_{m\times m}$, su determinante indicado como $\det[\mathbf{A}]$ o $|\mathbf{A}|$, es una cantidad escalar igual a $\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\,\kappa(i,j)$, siendo $\kappa(i,j)=(-1)^{i+j}\,\omega(i,j)$ el cofactor del coeficiente A_{ij}. El escalar $\omega(i,j)$ denominado menor de $[\mathbf{A}]$ en *i, j* es igual al determinante de la matriz formada después de eliminar la fila *i* y la columna *j* de la matriz $[\mathbf{A}]$. Este procedimiento se denomina *método de expansión por cofactores*. En particular, el determinante de matrices de 3 por 3 es igual a:

$$
\begin{aligned}
\det[\mathbf{A}] &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\
&= A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\
&= A_{11}\left(A_{22}A_{33}-A_{23}A_{32}\right)-A_{12}\left(A_{21}A_{33}-A_{23}A_{31}\right) \\
&\quad + A_{13}\left(A_{21}A_{32}-A_{22}A_{31}\right)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

El determinante de una matriz también se puede calcular utilizando el *operador permutación* como se describe en el próximo apartado.

1.3. Operadores especiales

1.3.1. Delta de Kronecker

El delta de Kronecker es una función de dos variables enteras positivas cuyo valor es 1 si las variables son iguales y 0 cuando las variables son diferentes. Dicha función se indica como δ_{ij} y se expresa de la forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

Los coeficientes de la matriz identidad se pueden definir mediante la función delta de Kronecker de la forma $I_{ij} = \delta_{ij}$.

1.3.2. Operador permutación

El operador permutación $\tilde{p}_{ijk}$ es una función de tres variables enteras positivas, el cual está definido de la forma:

$$\tilde{p}_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \tag{1.4}$$

siendo i, j y k las variables enteras cuyo valor es 1, 2 o 3. La permutación par e impar establece dos formas de ordenar los tres índices como se puede esquematizar en la siguiente figura.

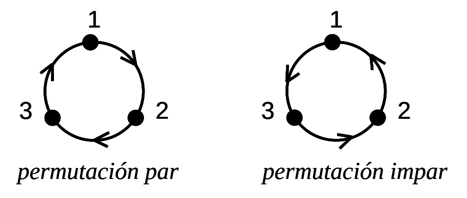


Figura 1.1. Operador permutación: orden de los índices en una permutación par e impar.

Por lo tanto el operador permutación indicado en la ecuación anterior se puede expresar de la forma:

$$\tilde{p}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \textit{permutación par} \quad i,j,k = 1,2,3 \; o \; 2,3,1 \; o \; 3,1,2 \\ -1 & \textit{permutación impar} \quad i,j,k = 1,3,2 \; o \; 3,2,1 \; o \; 2,1,3 \\ 0 & \textit{otros casos (dos o tres indices iguales)} \end{cases} \tag{1.5}$$

Una aplicación directa de esta función se observa en el cálculo del *determinante de una matriz* cuadrada de tamaño 3, donde:

$$\det[\mathbf{A}] = \tfrac{1}{6} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} \tilde{p}_{ijk}\,\tilde{p}_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt} \tag{1.6}$$

1.4. Notación indicial

Las componentes de las cantidades vectoriales se indican con letras en minúscula cursiva acompañadas de un subindice, por ejemplo a_i, b_j, c_k, etc. En cambio, las componentes de los tensores se representan mediante letras en mayúscula cursiva acompañadas de varios subíndices de acuerdo con el orden del tensor. Por ejemplo, las componentes de un tensor de segundo orden se pueden expresar como A_{ij}, B_{kl}, C_{rs}, etc.

Los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x_1, x_2, x_3 de un sistema coordenado cartesiano se denominan vectores base y se expresan como $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respectivamente.

En la mecánica del medio continuo, la notación indicial y la convención de suma de Einstein establecen una forma abreviada de representación de campos y operaciones, vectoriales y tensoriales. Tal notación omite los signos de sumatoria sobre cada índice repetido en una expresión, dejando implícita la suma de los productos entre las componentes del vector o del tensor.

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de la notación indicial útiles en el tratamiento de vectores y tensores.

Sea $\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Tal cantidad se puede expresar como un sumatoria de la forma:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{1.7}$$

La notación indicial acompañada de la convención de suma de Einstein omite el símbolo de sumatoria y establece la existencia de una

suma implícita de los 3 productos entre las componentes a_i y b_i, de la forma:

$$\alpha = a_i b_i \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{1.8}$$

Un *vector* **a** puede expresarse como la suma de los productos de cada componente y el vector base del sistema coordenado, es decir,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i \tag{1.9}$$

siendo a_1, a_2, a_3 las componentes del vector en dicho sistema coordenado. Por lo tanto el vector se puede escribir en notación indicial y convención de suma de Einstein de la forma:

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{1.10}$$

Sea β el resultado de la siguiente sumatoria:

$$\begin{aligned}\beta = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_i A_{ij} c_j &= b_1 A_{11} c_1 + b_1 A_{12} c_2 + b_1 A_{13} c_3 + \\ &+ b_2 A_{21} c_1 + b_2 A_{22} c_2 + b_2 A_{23} c_3 + b_3 A_{31} c_1 + b_3 A_{32} c_2 + b_3 A_{33} c_3\end{aligned} \tag{1.11}$$

La expresión anterior se puede simplificar en virtud de la notación indicial y la conveción de suma de Einstein, como:

$$\beta = b_i A_{ij} c_j \tag{1.12}$$

Sea C_{ik} una componente de un tensor de segundo orden obtenida de la sumatoria indicada a continuación.

$$\begin{aligned}
&C_{ik} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{jk} \quad (i,k = 1,2,3) \\
&C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \quad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\
&C_{13} = A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\
&C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \quad C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{13}B_{32} \\
&C_{23} = A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \\
&C_{31} = A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} \quad C_{32} = A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} \\
&C_{33} = A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

En notación indicial y convención de suma de Einstein las componentes C_{ik} se expresan de la forma:

$$C_{ik} = A_{ij} B_{jk} \tag{1.14}$$

En este libro se utilizará con frecuencia la notación indicial acompañada de la convención de suma de Einstein, la cual se denominará en adelante simplemente notación indicial.

En general se establecen las siguientes reglas en la sintaxis de la notación indicial para definir los vectores y tensores o para escribir las operaciones entre ellos.

- En un espacio tridimensional se presenta de forma implícita la sumatoria entre 1 y 3 de los términos con subíndices comunes. Sin embargo, en el espacio bidimensional en particular, se puede considerar que las sumatorias sobre subíndices comunes están definidas entre 1 y 2.

- El producto entre dos cantidades (vectoriales o tensoriales), que tienen un *subíndice común*, corresponde a la sumatoria de tal producto entre 1 y 3 sobre dicho subíndice. Por ejemplo, dado un vector de componentes b_j y un tensor de segundo orden de componentes A_{ij}, la notación indicial establece la siguiente equivalencia:

$$A_{ij} b_j \equiv \sum_{j=1}^{3} A_{ij} b_j \tag{1.15}$$

- Cuando las cantidades tienen dos o más subíndices comunes, se está indicando una sumatoria doble o múltiple de dicho producto sobre cada uno de los subíndices comunes. Por ejemplo, dados dos tensores de segundo orden cuyas componentes son A_{ij} y B_{ij}, la notación indicial establece las siguiente equivalencia:

$$A_{ij} B_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ij} \tag{1.16}$$

- La derivada de una componente vectorial o tensorial con respecto a otra componente que tienen un subíndice común, corresponde a la sumatoria de tales derivadas entre 1 y 3 sobre dicho subíndice. Por ejemplo, dado los vectores de componentes a_i y x_i, la notación indicial establece la siguiente equivalencia:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \qquad (1.17)$$

- Operaciones como la suma y la resta entre las componentes de vectores o tensores con subíndice común, representan un grupo de 3 ecuaciones escalares independientes. Por lo tanto no hay sumatoria entre las componentes de subíndice común. Por ejemplo, dado los vectores de componentes a_j y b_j, la suma vectorial en notación indicial corresponde a:

$$a_j + b_j \equiv \begin{cases} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{cases} \qquad (1.18)$$

- La igualdad entre los vectores de componentes a_j y b_j, se escribe en notación indicial de la forma $a_j = b_j$. En general, la igualdad entre dos tensores cuyas componentes son $A_{ij\cdots n}$ y $B_{ij\cdots n}$ se escribe en notación indicial de la forma $A_{ij\cdots n} = B_{ij\cdots n}$.

- El subíndice que no se repite entre los factores de un producto denominado *índice libre*, establece un conjunto de 3 ecuaciones independientes. Por ejemplo, dado el tensor de segundo orden cuyos componentes son A_{ij} y los vectores de componentes b_j y c_i, en notación indicial se tiene que:

$$c_i = A_{ij} b_j \equiv \begin{cases} c_1 = A_{11} b_1 + A_{12} b_2 + A_{13} b_3 \\ c_2 = A_{21} b_1 + A_{22} b_2 + A_{23} b_3 \\ c_3 = A_{31} b_1 + A_{32} b_2 + A_{33} b_3 \end{cases} \qquad (1.19)$$

- En un producto de tres o más cantidades, cada subíndice común no debe repetirse en más de dos componentes, por ejemplo la operación en notación indicial $A_{ij} B_{jk} c_j$ es incorrecta.

- Un subíndice repetido puede designarse con otra letra siempre y cuando sea distinta a los demás subíndices de la expresión, por ejemplo, $A_{ij} B_{jk} = A_{ip} B_{pk}$.

- Se recomienda utilizar un subíndice distinto para indicar una sumatoria en otro término, por ejemplo, se sugiere reescribir la operación $A_{ij}B_{jk} + a_j b_j$ de la forma $A_{ij}B_{jk} + a_l b_l$.

- Como excepción a las reglas anteriores, la sumatoria de las componentes con índices iguales de un tensor de segundo orden se representa en notación indicial de la forma:

$$A_{ii} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \tag{1.20}$$

1.5. Vectores

El vector es un elemento de la matemática que permite representar cantidades físicas caracterizadas por magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación en el espacio. Algunos ejemplos de vectores comunes en la mecánica son el desplazamiento, la velocidad y la fuerza. En este libro los vectores se representan con una letra minúscula en negrita, por ejemplo **a**, **b**, **u**, **f**, etc.

Dado un sistema coordenado cartesiano rectangular $x_1 x_2 x_3$ que cumple con la regla de la mano derecha, se define al vector $\mathbf{e}_1$ como el *vector unitario* paralelo al eje x_1, cuyo sentido coincide con el sentido positivo del eje x_1, como se muestra en la **Figura 1.2(a)**. Asimismo, los vectores $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son vectores unitarios cuya dirección y sentido están dados por los semiejes positivos de x_2 y x_3, respectivamente. En general se define como *vectores base* del sistema coordenado $x_1 x_2 x_3$ al conjunto de vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ cuya dirección y sentido están dados por los semiejes positivos de x_1, x_2, x_3, respectivamente. En consecuencia los vectores base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ conforman una *base ortonormal* en $\mathbb{R}^3$.

Recurriendo a la definición de la suma vectorial, un vector **a** se puede descomponer en la suma de tres vectores paralelos a los ejes coordenados como se indica en la **Figura 1.2(b)**. Por lo tanto el vector **a** es igual a la sumatoria de los productos dados entre un escalar a_i y un vector unitario $\mathbf{e}_i$, para $i = 1,2,3$, es decir:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_i\mathbf{e}_i \tag{1.21}$$

Las cantidades escalares a_1, a_2, a_3 se denominan *componentes rectangulares* o simplemente *componentes* del vector **a** en el sistema coordenado $x_1x_2x_3$. Gráficamente, las componentes corresponden a las proyecciones del segmento recto definido por el vector sobre los ejes coordenados.

En la expresión anterior la sumatoria de los productos entre las componentes del vector **a** y los vectores base del sistema coordenado ha sido escrita en notación indicial de la forma $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$.

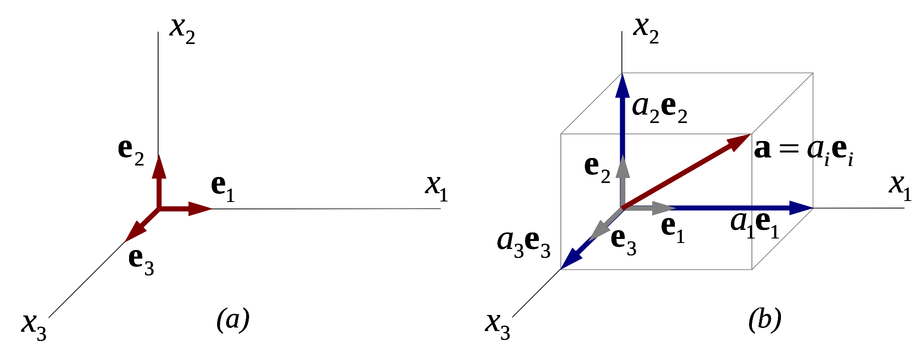


Figura 1.2. Vectores: (a) vectores base de un sistema coordenado, (b) descomposición en componentes rectangulares de un vector **a**.

1.5.1. Norma de un vector y producto escalar

Mediante el teorema de Pitágoras generalizado se establece que la magnitud o norma del vector a denotada de la forma $\|\mathbf{a}\|$, es igual a:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.22}$$

Dados los vectores $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$, que conforman un ángulo θ entre ellas, se define el *producto escalar* o también denominado *producto punto* o *producto interno* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ como la cantidad escalar:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta \tag{1.23}$$

Asimismo, el producto escalar se puede expresar en términos de las componentes rectangulares de los vectores **a** y **b** de la forma:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i \tag{1.24}$$

A partir de las definiciones del producto escalar se concluye que satisface la propiedad conmutativa la cual establece que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

La norma al cuadrado de un vector **a** se puede escribir en notación compacta e indicial como $\|\mathbf{a}\|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_i a_i$.

De las expresiones anteriores se deduce que el producto escalar entre dos vectores paralelos es igual al producto de sus magnitudes. En cambio, si los vectores son ortogonales el producto punto entre ellos es nulo. El siguiente ejercicio indica el producto escalar entre los vectores base $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ del sistema coordenado $x_1x_2x_3$, los cuales son unitarios y ortogonales entre sí.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0\quad,\quad\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=0\quad,\quad\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1=0\\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1=1\quad,\quad\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2=1\quad,\quad\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3=1\end{aligned}\tag{1.25}$$

Estas expresiones demuestran que el conjunto de vectores base $\mathbf{e}_i$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

La ecuación anterior se puede generalizar utilizando el delta de Kronecker de la forma:

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}\tag{1.26}$$

1.5.2. Producto vectorial

El producto vectorial, también llamado producto cruz o producto externo entre los vectores a y b, indicado de la forma $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, tiene como resultado un vector normal al plano que conforman a y b, cuyo sentido satisface la regla de la mano derecha y cuya magnitud está definida como:

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta\tag{1.27}$$

siendo θ el ángulo formado entre los vectores a y b como se indica en **Figura 1.3**.

Dados los vectores $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$, el producto vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es igual a un vector obtenido del siguiente determinante.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{1.28}$$

Utilizando el operador permutación $\tilde{p}_{ijk}$ descrito anteriormente, el producto vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ se puede escribir en notación indicial como:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \tilde{p}_{ijk}\mathbf{e}_i a_j b_k \tag{1.29}$$

Sea un vector $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ indicado en notación compacta, las componentes de **c** corresponden a $c_i = \tilde{p}_{ijk} a_j b_k$ en notación indicial.

A partir de las expresiones anteriores se establece que el producto vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, por lo cual no satisface la propiedad conmutativa, es decir $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Además se observa que el producto cruz entre dos vectores paralelos es igual a cero debido a que tales vectores no conforman un plano.

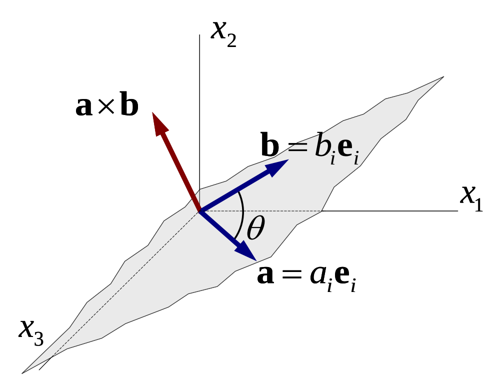


Figura 1.3. Producto vectorial.

Mediante el producto cruz entre los vectores base $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ se puede demostrar la regla de la mano derecha del sistema coordenado $x_1x_2x_3$, como se indica en la siguiente expresión:

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2 \tag{1.30}$$

1.5.3. Notación matricial

Las componentes de un vector referidas a un sistema coordenado específico se pueden expresar en notación matricial mediante una matriz columna de 3 filas cuyos coeficientes corresponden a las componentes de dicho vector.

Sea un vector $\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$, las componentes con respecto al sistema coordenado asociado a los vectores base $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ se representan en notación matricial de la forma:

$$[\mathbf{a}] = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \tag{1.31}$$

En particular, un vector definido en un espacio bidimensional se expresa en notación matricial mediante una matriz columna de la forma $[\mathbf{a}] = [a_1 \quad a_2]^T$.

1.5.4. Transformación de sistema coordenado

Hasta el momento las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ han sido determinadas con respecto a un sistema coordenado x_1, x_2, x_3 definido por los vectores base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ como se indica en la **Figura 1.4**(a). Dado un nuevo sistema coordenado cartesiano rectangular $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ mostrado en la **Figura 1.4**(b), que también cumple con la regla de la mano derecha y cuyos vectores base son $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ formando también una base ortonormal, el mismo vector a se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{a} = \bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{a}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{a}_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{a}_i \bar{\mathbf{e}}_i \tag{1.32}$$

donde los factores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ corresponden a las componentes del vector a con respecto al sistema coordenado $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

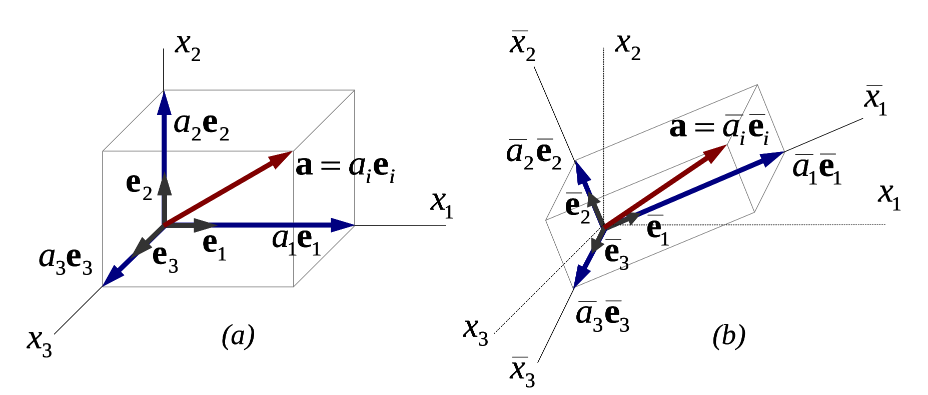


Figura 1.4. Vector a definido en dos sistemas coordenados: (a) sistema coordenado original, (b) sistema coordenado nuevo.

Con el fin de relacionar los dos sistemas coordenados, se define el *coeficiente de transformación* M_{ij} como el coseno director del vector $\bar{\mathbf{e}}_i$ con respecto al vector $\mathbf{e}_j$ (o al eje x_j del sistema coordenado original), de tal forma que:

$$M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{1.33}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{e}_j$ se obtiene $M_{ij}\mathbf{e}_j = (\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j$. Dado que $\mathbf{e}_j$ conforma una base ortonormal el término a la derecha de la igualdad anterior es igual a $(\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = \bar{\mathbf{e}}_i$, y en consecuencia:

$$\bar{\mathbf{e}}_i = M_{ij}\mathbf{e}_j \tag{1.34}$$

Mediante un procedimiento similar se puede demostrar que:

$$\mathbf{e}_j = M_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \tag{1.35}$$

Sea un vector $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i = \bar{a}_i\bar{\mathbf{e}}_i$, las componentes definidas en el sistema coordenado $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ se expresan en función de las componentes dadas en el sistema original en notación indicial de la forma:

$$\bar{a}_i = M_{ij}a_j \tag{1.36}$$

Reescribiendo la ecuación anterior en notación matricial se tiene que $[\bar{\mathbf{a}}] = [\mathbf{M}][\mathbf{a}]$, es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Se define a $[\mathbf{M}]$ como la *matriz de transformación* cuyos coeficientes son los cosenos directores M_{ij}.

Recordando que el producto escalar entre los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ se puede expresar como $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ y sustituyendo la Ecuación (1.34) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j &= M_{ik}\mathbf{e}_k \cdot M_{jl}\mathbf{e}_l = M_{ik}M_{jl}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = M_{ik}M_{jl}\delta_{kl} \\ &= M_{ik}\delta_{kl}M_{jl} = M_{il}M_{jl} = M_{il}M_{lj}^T = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{1.38}$$

El resultado anterior se presenta en notación matricial de la forma $[\mathbf{M}][\mathbf{M}]^T = [\mathbf{I}]$ donde $[\mathbf{I}]$ es la matriz identidad de orden 3, de lo cual se concluye que $[\mathbf{M}]$ es una matriz cuadrada ortogonal donde $[\mathbf{M}]^{-1} = [\mathbf{M}]^T$. En general la matriz de transformación no es una matriz simétrica.

1.6. Tensores

La notación tensorial permite un tratamiento unificado de las cantidades físicas y geométricas, las cuales son expresadas mediante una entidad matemática independiente del sistema coordenado denominada tensor. Este tipo de representación es importante en la formulación de los problemas de la mecánica del medio continuo. A continuación se define el tensor y se describen algunas de sus propiedades.

1.6.1. Producto diádico y producto tensorial

Además de las cantidades representadas mediante un escalar o un vector, existen entidades físicas definidas por dos o más vectores. Por ejemplo, para representar una fuerza actuando sobre una superficie es necesario conocer un vector que indique la magnitud y la dirección de la fuerza y otro vector que establezca la orientación de la superficie. Algunas cantidades de este tipo se pueden describir a través de un producto diádico.

El producto diádico es el *producto tensorial* $\otimes$ entre dos vectores que tiene como resultado un tensor de segundo orden. Dados los vectores **a** y **b**, el producto diádico entre ellos se escribe de la forma $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ los vectores base de un sistema coordenado cartesiano, los vectores **a** y **b** pueden expresarse como:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_i\mathbf{e}_i \tag{1.39}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 = b_i\mathbf{e}_i \tag{1.40}$$

El producto diádico entre los vectores **a** y **b** se define en término de sus componentes como:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= (a_i\mathbf{e}_i) \otimes (b_j\mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + a_1 b_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ &+ a_2 b_1 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + a_2 b_2 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + a_2 b_3 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ &+ a_3 b_1 (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + a_3 b_2 (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + a_3 b_3 (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\end{aligned} \tag{1.41}$$

La expresión anterior indica que todo producto diádico es la combinación lineal de productos diádicos entre los vectores base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ o *díadas unitarias*.

En general el producto diádico no cumple con la propiedad conmutativa, es decir $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. En cambio, cumple con la propiedad asociativa del producto con un escalar α indicada en la Expresión (1.42) y con la propiedad distributiva de la suma presentada en la Ecuación (1.43).

$$(\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \tag{1.42}$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \quad . \quad (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \tag{1.43}$$

Ejemplo 1.1. Siendo **a** y **b** dos vectores, demostrar que:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

Para un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$, se tiene un tensor de segundo orden **C** tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \otimes b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

$$C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \to C_{ij} = a_i b_j$$

$$C_{ij}^T = C_{ji} = b_i a_j \to \mathbf{C}^T = b_i a_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

En consecuencia $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

A continuación se demuestra que todo producto diádico es independiente del sistema coordenado escogido. Sean $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ los vectores base de un nuevo sistema coordenado $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ los vectores base del sistema coordenado original $x_1 x_2 x_3$ como se ilustra en la **Figura 1.5**.

El mismo producto diádico se puede expresar en un nuevo sistema coordenado cuyos vectores base son $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$, y las componentes de los vectores **a** y **b** son $\bar{a}_i$ y $\bar{b}_j$ respectivamente, de la forma:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\bar{a}_i \bar{\mathbf{e}}_i) \otimes (\bar{b}_j \bar{\mathbf{e}}_j) = \bar{a}_i \bar{b}_j (\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) \tag{1.44}$$

Como se indicó en el Apartado 1.5.4, se designa como M_{ij} al coseno director de $\bar{\mathbf{e}}_i$ con respecto al sistema coordenado original en la dirección $\mathbf{e}_j$, es decir $M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$, y en consecuencia $\bar{\mathbf{e}}_i = M_{ij}\mathbf{e}_j$ y $\mathbf{e}_j = M_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i$. Asimismo para las componentes de los vectores **a** y **b** se cumple que:

$$\bar{a}_i = M_{ip}a_p \quad , \quad \bar{b}_i = M_{iq}b_q \tag{1.45}$$

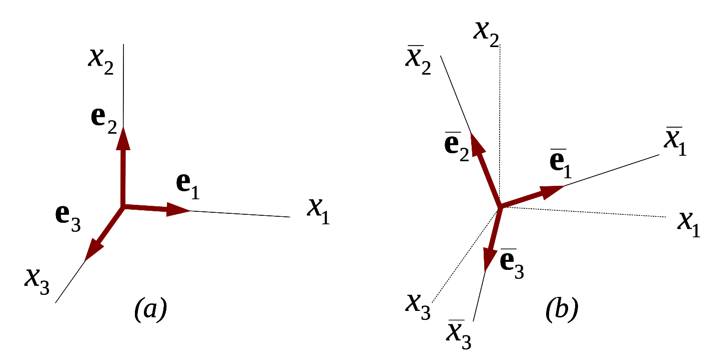


Figura 1.5. Vectores base: (a) sistema coordenado original, (b) sistema coordenado nuevo.

Sustituyendo las Ecuaciones (1.34) y (1.45) en la Ecuación (1.44), se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{a}_i\bar{b}_j(\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) &= M_{ip}a_p M_{jq}b_q (M_{ir}\mathbf{e}_r \otimes M_{js}\mathbf{e}_s) \\ &= M_{ip}M_{ir}M_{jq}M_{js}a_p b_q (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s)\end{aligned}$$

Dado que los cosenos directores M_{ij} conforman una matriz de transformación de coordenadas $[\mathbf{M}]$, cuadrada y ortogonal, de tal forma que cumple que $M_{ip}M_{ir} = M^T_{pi}M_{ir} = \delta_{pr}$ o que $M_{jq}M_{js} = M^T_{qj}M_{js} = \delta_{qs}$, del procedimiento anterior se llega a:

$$\begin{aligned}\bar{a}_i\bar{b}_j(\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) &= \delta_{pr}\delta_{qs}a_p b_q (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \\ &= a_r b_s (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \\ &= a_i b_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\end{aligned} \tag{1.46}$$

En general, el *producto tensorial* entre *n* vectores es la combinación lineal de los productos tensoriales de *n* vectores base. Por ejemplo, si $\mathbf{c} = c_k\mathbf{e}_k$, el producto tensorial entre los vectores **a**, **b** y **c**, indicado como $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ es igual a la combinación lineal de los productos tensoriales de los vectores base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$ de la forma $a_i b_j c_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$.

1.6.2. Definición de tensor de segundo orden

Un tensor de segundo orden se define como la combinación lineal de productos diádicos y por lo tanto se puede expresar como la combinación lineal de díadas unitarias. Considerando los vectores base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, un tensor de segundo orden **A** es igual a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \; & A_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ & + A_{21}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{22}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{23}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ & + A_{31}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{32}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\end{aligned} \tag{1.47}$$

La sumatoria presentada en la ecuación anterior se puede representar en notación indicial como:

$$\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \tag{1.48}$$

En general los tensores se indicarán con letras del alfabeto inglés en mayúscula negrita o del alfabeto griego en negrita como por ejemplo, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$, etc.

Un tensor es independiente de cualquier sistema coordenado, sin embargo sus componentes se pueden definir solamente después de haber escogido alguno y por lo tanto sus valores dependerán de dicho sistema coordenado. De acuerdo a lo anterior, los coeficientes A_{ij} de la Ecuación (1.48) se denominan componentes del tensor **A** en el sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$.

Al utilizar un nuevo sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$, el mismo tensor **A** se expresará de la forma:

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{ij}(\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) \tag{1.49}$$

donde los coeficientes $\bar{A}_{ij}$ son las componentes del tensor **A** en el sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$.

Igualando las Ecuaciones (1.48) y (1.49), y sustituyendo la Ecuación (1.35) se obtienen los coeficientes en la nueva base $\bar{A}_{ij}$ en términos de los cosenos directores y de los coeficientes en la base original A_{ij}, así:

$$A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = A_{ij}(M_{pi}\bar{\mathbf{e}}_p \otimes M_{qj}\bar{\mathbf{e}}_q) = A_{ij}M_{pi}M_{qj}(\bar{\mathbf{e}}_p \otimes \bar{\mathbf{e}}_q) \quad \wedge$$
$$A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \bar{A}_{pq}(\bar{\mathbf{e}}_p \otimes \bar{\mathbf{e}}_q)$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \quad \bar{A}_{pq} &= M_{pi}M_{qj}A_{ij} \\ &= M_{pi}A_{ij}M^T_{jq}\end{aligned} \tag{1.50}$$

Para identificar un tensor de segundo orden como tal es suficiente con demostrar que en cualquier transformación de un sistema coordenado cartesiano a otro, las componentes cambian como lo indica la expresión anterior.

Dado que la matriz de transformación de coeficientes M_{pi} es ortogonal, las componentes del tensor **A** en la base original se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= M_{pi} M_{qj} \bar{A}_{pq} \\ &= M^T_{ip} \bar{A}_{pq} M_{qj} \end{aligned} \tag{1.51}$$

1.6.3. Multiplicación de un tensor por un escalar y suma de tensores

Se define la multiplicación del tensor $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ por un escalar α, como un tensor **B** del mismo orden la forma $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \alpha A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ cuyas componentes serán iguales a $B_{ij} = \alpha A_{ij}$. Este tipo de multiplicación es conmutativa, es decir $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$.

La multiplicación $\alpha\mathbf{A}$ también se puede expresar como el producto tensorial de la forma $\alpha \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \alpha$.

Sean **A** y **B** dos tensores del mismo orden, se define la suma entre ambos como el tensor $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_{ij} + B_{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, donde los componentes del tensor resultante en la base $\mathbf{e}_i$ son $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. De manera similar se define la resta entre tensores.

1.6.4. Tensores característicos de segundo orden

De acuerdo con sus propiedades a continuación se indican algunos tensores especiales de segundo orden.

- El *tensor transpuesto de segundo orden* del tensor $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ se denota como $\mathbf{A}^T$ y se define de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= A_{ji}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ A^T_{ij} &= A_{ji} \end{aligned} \tag{1.52}$$

- Un tensor de segundo orden **A** es *simétrico* si toda componente $A_{ij} = A_{ji}$ en una base cualquiera $\mathbf{e}_i$. Suponiendo que $A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \bar{A}_{pq}(\bar{\mathbf{e}}_p \otimes \bar{\mathbf{e}}_q)$ es un *tensor simétrico de segundo*

orden donde $A_{ij} = A_{ji}$, se puede demostrar que $\bar{A}_{pq} = \bar{A}_{qp}$ sustituyendo la Expresión (1.50). En la mecánica del continuo es común encontrar tensores simétricos de segundo orden como el esfuerzo y la deformación.

- Se denomina *tensor antisimétrico de segundo orden* a aquel tensor $\mathbf{A}_{anti}$ cuyas componentes son $A_{ij} = -A_{ji}$. En tal caso se observa que las componentes de A_{ii} deben ser iguales a cero.

- Todo tensor de segundo orden se puede descomponer en la suma de un tensor simétrico más un tensor antisimétrico mediante una combinación única. Siendo $\mathbf{A}_{sim} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$ un tensor simétrico y $\mathbf{A}_{anti} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$ un tensor antisimétrico, en general el tensor $\mathbf{A}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{A}_{sim} + \mathbf{A}_{anti} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) \\ A_{ij} &= \tfrac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \tfrac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) \end{aligned} \tag{1.53}$$

- El *tensor unidad de segundo orden* denotado como **1**, está definido de la forma:

$$\mathbf{1} = \delta_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \tag{1.54}$$

  donde sus componentes en la base $\mathbf{e}_i$ corresponden al delta de Kronecker. Con el fin de expresar el tensor unidad en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$ se sustituye la Ecuación (1.35) en la ecuación anterior obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \delta_{ij}(M_{ri}\bar{\mathbf{e}}_r \otimes M_{sj}\bar{\mathbf{e}}_s) = \delta_{ij}M_{ri}M_{sj}(\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_s) \\ &= M_{jr}M_{sj}(\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_s) = \delta_{rs}(\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_s) = \delta_{ij}(\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) \end{aligned} \tag{1.55}$$

  En conclusión el tensor unidad tiene como propiedad que sus componentes δ_{ij} son independientes del sistema coordenado.

- Todo tensor cuyas componentes son las mismas para cualquier sistema coordenado se denomina *tensor isótropo*. Se puede demostrar que todo tensor isótropo de segundo orden es de la forma p**1** donde p es un escalar. Tales tensores también se denominan *tensores esféricos*.

- El *determinante* de un tensor de segundo orden se puede expresar en función del operador permutación de la forma:

$$\det \mathbf{A} = \tfrac{1}{6}\tilde{p}_{ijk}\tilde{p}_{rst}A_{ir}A_{js}A_{kt} \tag{1.56}$$

1.6.5. Tensores de orden n

En general se define un tensor de orden *n* como la combinación lineal de los productos tensoriales de *n* vectores base. Sea un tensor **A** de orden *n* el cual se expresa en función de sus componentes $A_{ij\cdots m}$ de la forma:

$$\mathbf{A} = \underbrace{A_{ij\cdots m}}_{n\,indices}\underbrace{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_m)}_{n\ factores} \tag{1.57}$$

En particular, una cantidad escalar corresponde a un tensor de orden cero, mientras que un vector es un tensor de orden uno.

Mediante un desarrollo similar al presentado en la Ecuación (1.50) y (1.51), las componentes del tensor en una base nueva $\bar{\mathbf{e}}_i$ en términos de las componentes en la base original son iguales a:

$$\underbrace{A_{ij\cdots m}}_{n\,indices} = \underbrace{M_{pi}M_{qj}\cdots M_{tm}}_{n\ factores}\underbrace{\bar{A}_{pq\cdots t}}_{n\,indices} \tag{1.58}$$

Dentro de los tensores característicos de orden superior se define el *tensor alterno* como un tensor isótropo de orden tres de la forma:

$$\tilde{p}_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \tag{1.59}$$

donde $\tilde{p}_{ijk}$ es el operador permutación.

Existen tres tensores isótropos de cuarto orden linealmente independientes expresados como $\delta_{ij}\delta_{kl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$, $\delta_{ik}\delta_{jl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ y $\delta_{il}\delta_{jk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$, por lo tanto la forma general del tensor isótropo de cuarto orden es la combinación lineal de los tres tensores anteriores, es decir:

$$(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \eta\delta_{il}\delta_{jk})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{1.60}$$

donde λ, μ y η son valores escalares.

Un caso especial de tensor isótropo es el *tensor simétrico unitario de cuarto orden* **I**, el cual está definido de la forma:

$$\mathbf{I} = \tfrac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{1.61}$$

1.6.6. Productos entre tensores

Dentro de las operaciones entre tensores de cualquier orden, útiles en la mecánica del continuo, existe el producto exterior y el producto interior. A continuación se resumen algunas de estas operaciones.

- *Producto exterior o tensorial entre un vector y un tensor*. Sea el vector $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ y el tensor de segundo orden $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ de componentes a_i y B_{ij} respectivamente, en la base $\mathbf{e}_i$. El tensor de tercer orden $\mathbf{C} = C_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$ es igual al *producto exterior* entre el vector $\mathbf{a}$ y el tensor $\mathbf{B}$ definido como $\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{B} = a_i B_{jk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$, cuyas componentes son $C_{ijk} = a_i B_{jk}$. En particular, el producto exterior entre dos vectores corresponde al producto diádico definido anteriormente.

- *Producto exterior o tensorial entre dos tensores*. Si $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ y $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ son tensores de segundo orden con sus respectivas componentes A_{ij} y B_{ij} en la base $\mathbf{e}_i$, el producto exterior $\mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ es un tensor de cuarto orden de componentes $D_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$.

- *Producto interior o contraído entre un vector y un tensor*. Sea el vector $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ y el tensor de segundo orden $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ de componentes a_i y B_{ij} respectivamente, en la base $\mathbf{e}_i$. Si el vector $\mathbf{c} = c_i \mathbf{e}_i$ es el *producto interior* del vector $\mathbf{a}$ y el tensor $\mathbf{B}$, tal vector se escribe de la forma $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = a_i B_{ij} \mathbf{e}_j$ y por lo tanto $c_j = a_i B_{ij}$. Otro producto interior se define como el vector $\mathbf{c} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ cuyas componentes son $c_i = B_{ij} a_j$. En particular, si $\mathbf{B}$ es un tensor simétrico se cumple que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ en notación compacta y $a_i B_{ij} = B_{ij} a_j$ en notación indicial.

- *Producto interior o contraído entre dos tensores*. Si $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ y $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ son tensores de segundo orden con sus respectivas componentes A_{ij} y B_{ij} en la base $\mathbf{e}_i$, uno de los productos interiores $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$ es un tensor de segundo orden de componentes $D_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ en este mismo sistema.

- *Tensor inverso de segundo orden*. Si existe un tensor $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$, este tensor se denomina *tensor inverso* de $\mathbf{A}$.

- *Tensor ortogonal de segundo orden*. Si el tensor transpuesto $\mathbf{A}^T$ y el tensor inverso $\mathbf{A}^{-1}$ son iguales, es decir $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, el tensor **A** se denomina *tensor ortogonal*.

- *Producto doblemente contraído entre dos tensores*. Sean los tensores de segundo orden $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ y $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, se definen los siguientes dos *productos doblemente contraídos*. El primero se escribe como $\alpha = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B}$ y corresponde en notación indicial al escalar $\alpha = A_{ij} B_{ji}$. El segundo se presenta de la forma $\alpha = \mathbf{A} : \mathbf{B}$ y se define como $\alpha = A_{ij} B_{ij}$. Si al menos uno de los dos tensores **A** o **B** es simétrico, es decir, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ o $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, los dos tipos de producto doblemente contraído coinciden, es decir $\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$.

- *Producto doblemente contraído entre un tensor de 4 orden y un tensor de 2 orden*. Sea el tensor de cuarto orden $\mathbf{D} = D_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ y el tensor de segundo orden $\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$. Se define el tensor de segundo orden **B** como el resultado del producto doblemente contraído $\mathbf{B} = \mathbf{D} : \mathbf{A}$, cuyas componentes son iguales a $B_{ij} = D_{ijkl} A_{kl}$

A continuación se presentan algunos ejemplos y demostraciones de productos entre vectores y tensores.

Ejemplo 1.2. Dado un vector **a** y un tensor simétrico de segundo orden **A**, demostrar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$.

Para un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$, se tiene un vector **c** tal que:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = a_i \mathbf{e}_i \cdot A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_i A_{ij} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_i A_{ij} \mathbf{e}_j$$

$$c_j \mathbf{e}_j = a_i A_{ij} \mathbf{e}_j \rightarrow c_j = a_i A_{ij}$$

Ahora, se define un vector **d** de la forma:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot a_j \mathbf{e}_j = A_{ij} a_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = A_{ij} a_j \mathbf{e}_i$$

$$d_i \mathbf{e}_i = A_{ij} a_j \mathbf{e}_i \rightarrow d_i = A_{ij} a_j$$

Por lo tanto $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ y en consecuencia $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$, si $A_{ij} = A_{ji}$.

Ejemplo 1.3. Dado el tensor unidad de segundo orden **1**, el vector **a** y el tensor de segundo orden **B** demostrar que:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}$$

Para un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$, se tiene un vector **c** tal que:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{1}=a_i\mathbf{e}_i\cdot\delta_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=a_i\delta_{ij}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=a_i\delta_{ij}\mathbf{e}_j$$
$$c_j\mathbf{e}_j=a_i\delta_{ij}\mathbf{e}_j\rightarrow c_j=a_i\delta_{ij}$$

$$\begin{cases}c_1=a_1\delta_{11}+a_2\delta_{21}+a_3\delta_{31}=a_1\\ c_2=a_1\delta_{12}+a_2\delta_{22}+a_3\delta_{32}=a_2\\ c_3=a_1\delta_{13}+a_2\delta_{23}+a_3\delta_{33}=a_3\end{cases}$$
$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{a}$$

Dado que el tensor unidad es simétrico, es decir que $\delta_{ij}=\delta_{ji}$, se demuestra que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{a}$ como lo indica el problema anterior.

Para la segunda demostración se define un tensor de segundo orden $\mathbf{D}=D_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ tal que:

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{1}=D_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=B_{ik}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k\cdot\delta_{kj}\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_j=B_{ik}\delta_{kj}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_j$$
$$D_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=B_{ik}\delta_{kj}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\rightarrow D_{ij}=B_{ik}\delta_{kj}$$
$$D_{11}=B_{11}\delta_{11}+B_{12}\delta_{21}+B_{13}\delta_{31}=B_{11}$$
$$D_{12}=B_{11}\delta_{12}+B_{12}\delta_{22}+B_{13}\delta_{32}=B_{12}$$
$$\vdots$$
$$D_{33}=B_{31}\delta_{13}+B_{32}\delta_{23}+B_{33}\delta_{33}=B_{33}$$
$$\mathbf{D}=\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{B}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{B}$$

De igual forma se define un tensor de segundo orden $\mathbf{G}=G_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ tal que:

$$\mathbf{G} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{B} = G_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \cdot B_{kj}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ik}B_{kj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j$$

$$G_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ik}B_{kj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \rightarrow D_{ij} = \delta_{ik}B_{kj}$$

$$G_{11} = \delta_{11}B_{11} + \delta_{12}B_{21} + \delta_{13}B_{31} = B_{11}$$

$$G_{12} = \delta_{11}B_{12} + \delta_{12}B_{22} + \delta_{13}B_{32} = B_{12}$$

$$\vdots$$

$$G_{33} = \delta_{31}B_{13} + \delta_{32}B_{23} + \delta_{33}B_{33} = B_{33}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

1.6.7. Notación matricial aplicada a tensores

Como se ha presentado anteriormente, la relación entre las cantidades tensoriales se representan de forma directa o compacta como: $\alpha, \beta, \ldots$ para cantidades escalares, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ para vectores y $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ para tensores de mayor orden. Asimismo, es posible escribir las mismas relaciones en términos de sus componentes en notación indicial de la forma $\alpha, \beta, \ldots$ para escalares, $a_i, b_i, \ldots$ para vectores y $A_{ij}, B_{ij}, \ldots$ para tensores (de segundo orden).

En la notación compacta se plantean las ecuaciones tensoriales de manera independiente al sistema coordenado escogido. En cambio en notación indicial la relación entre componentes se debe escribir manteniendo la misma base coordenada.

Mediante la *notación matricial* las componentes de los vectores y los tensores de segundo orden definidos en una base específica se pueden organizar como coeficientes de una matriz.

Para el vector $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i = \bar{a}_i\bar{\mathbf{e}}_i$ sus componentes, a_i en la base $\mathbf{e}_i$ y $\bar{a}_i$ en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$, conforman las matrices columna de tres filas $[\mathbf{a}]$ y $[\bar{\mathbf{a}}]$ respectivamente, definidas como:

$$[\mathbf{a}] = (a_i) = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \quad , \quad [\bar{\mathbf{a}}] = (\bar{a}_i) = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{a}_3]^T \qquad (1.62)$$

Para el tensor de segundo orden $\mathbf{B} = B_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \bar{B}_{ij}(\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j)$, sus componentes, B_{ij} en la base $\mathbf{e}_i$ y $\bar{B}_{ij}$ en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$, conforman las matrices cuadradas de tamaño 3 $[\mathbf{B}]$ y $[\bar{\mathbf{B}}]$ respectivamente, definidas como:

$$[\mathbf{B}] = (B_{ij}) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$
$$[\overline{\mathbf{B}}] = (\overline{B}_{ij}) = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} & \overline{B}_{13} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} & \overline{B}_{23} \\ \overline{B}_{31} & \overline{B}_{32} & \overline{B}_{33} \end{bmatrix} \tag{1.63}$$

Sea el vector **a** y el tensor de segundo orden **B** de componentes a_i y B_{ij} respectivamente, en la base $\mathbf{e}_i$ y de componentes $\overline{a}_i$ y $\overline{B}_{ij}$ en la base $\overline{\mathbf{e}}_i$. Las componentes del vector **a** y del tensor **B** se definen en función de la base original de la forma $\overline{\mathbf{e}}_i = M_{ij}\mathbf{e}_j$, $\overline{a}_i = M_{ij}a_j$ y $\overline{B}_{ij} = M_{ip}M_{jq}B_{pq}$ respectivamente, siendo M_{ij} los coeficientes de la matriz de transformación $[\mathbf{M}]$. Por lo tanto, la ecuación de transformación en notación matricial para el vector **a** y para el tensor **B** se escriben como:

$$[\overline{\mathbf{a}}] = [\mathbf{M}][\mathbf{a}] \tag{1.64}$$

$$[\overline{\mathbf{B}}] = [\mathbf{M}][\mathbf{B}][\mathbf{M}]^T \tag{1.65}$$

Siendo $[\mathbf{M}]$ una matriz ortogonal, las relaciones reciprocas a las dos ecuaciones anteriores serán de la forma:

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{M}]^T [\overline{\mathbf{a}}] \tag{1.66}$$

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{M}]^T [\overline{\mathbf{B}}][\mathbf{M}] \tag{1.67}$$

El **Cuadro 1.1** describe las operaciones más comunes entre tensores en notación compacta, en notación indicial y en notación matricial.

Operación	**Notación compacta**	**Notación indicial**	**Notación matricial**
Producto escalar	$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\alpha = a_i b_i$	$\alpha = [\mathbf{a}]^T [\mathbf{b}]$
Producto vectorial	$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$c_i = \tilde{p}_{ijk} a_j b_k$	
Producto tensorial	$\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	$C_{ij} = a_i b_j$	$[\mathbf{C}] = [\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T$
Producto contraído tensor - vector	$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$	$c_i = A_{ij} b_j$	$[\mathbf{c}] = [\mathbf{A}][\mathbf{b}]$
Producto contraído vector - tensor	$\mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}$	$c_j = b_i A_{ij}$	$[\mathbf{c}] = [\mathbf{A}]^T [\mathbf{b}]$
Producto contraído vector - tensor - vector	$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}$	$\alpha = a_i C_{ij} b_j$	$\alpha = [\mathbf{a}]^T [\mathbf{C}][\mathbf{b}]$
Producto contraído tensor - tensor	$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$	$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]$
Producto contraído tensor – tensor trans.	$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$	$C_{ij} = A_{ik} B_{jk}$	$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]^T$
Producto doble contraído tensor - tensor	$\alpha = \mathbf{A} : \mathbf{B}$	$\alpha = A_{ij} B_{ij}$	
Producto doble contraído tensor 4 orden – tensor 2 orden	$\mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ijkl} B_{kl}$	
Traza de un tensor	$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{1} : \mathbf{A}$	$\delta_{ij} A_{ij} = A_{ii}$	
Determinante de un tensor	$\alpha = \det \mathbf{A}$	$\alpha = \tilde{p}_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$	$\alpha = \det[\mathbf{A}]$
Gradiente de un campo escalar	$\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,\phi = \nabla\phi$	$a_i = \partial\phi / \partial x_i$	$[\mathbf{a}] = [\nabla]\phi$
Tensor derivada o gradiente de un campo vectorial	$\mathbf{B} = \nabla\mathbf{a} = \mathbf{a} \otimes \nabla$	$B_{ij} = \partial a_i / \partial x_j$	$[\mathbf{B}] = [\mathbf{a}][\nabla]^T$
Gradiente simétrico de un vector	$\mathbf{B} = \nabla^s \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \nabla)$	$B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)$	$\frac{1}{2}[\nabla][\mathbf{a}]^T + \frac{1}{2}[\mathbf{a}][\nabla]^T$
Divergencia de campo vectorial	$\alpha = \mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$	$\alpha = \partial a_i / \partial x_i$	$\alpha = [\nabla]^T [\mathbf{a}]$

Cuadro 1.1. Resumen de operaciones expresadas en notación tensorial, indicial y matricial.

1.6.8. Notación de Voigt

Un tipo particular de notación utilizada en la implementación de las operaciones entre tensores en el método de los elementos finitos (Zienkiewicz 1980; Hughes 2000) se denomina notación de Voigt. Al igual que la notación matricial, la notación de Voigt organiza las componentes de un tensor dadas en un sistema coordenado específico como términos de una matriz.

Al igual que la notación matricial, un vector se representa en notación de Voigt como una matriz columna de 3 filas, cuyos términos son las componentes del vector en una base coordenada específica como lo indica la Ecuación (1.62).

Un tensor simétrico de segundo orden (como por ejemplo el tensor de esfuerzo o el tensor de deformación), se puede expresar en notación de Voigt mediante una matriz columna de 6 filas que contiene las 6 componentes diferentes del tensor con respecto a un sistema coordenado específico. Por lo tanto, un tensor $A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ cuyas componentes están definidas en la base $\mathbf{e}_i$ se representa como una matriz columna de la forma:

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{13} & A_{12} \end{bmatrix}^T \tag{1.68}$$

El orden dado a las componentes del tensor en la matriz anterior corresponde al indicado en el siguiente arreglo:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \leftarrow A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix} \tag{1.69}$$

Sean **A** y **B** dos tensores simétricos de segundo orden de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = \; & A_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) + \\
& + A_{12}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{22}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{23}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + \\
& + A_{13}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{23}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + A_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\
\mathbf{B} = \; & B_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + B_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + B_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) + \\
& + B_{12}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + B_{22}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + B_{23}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) + \\
& + B_{13}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + B_{23}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + B_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)
\end{aligned} \tag{1.70}$$

el escalar resultante del producto doblemente contraído entre los dos tensores es igual a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:\mathbf{B} &= A_{ij}B_{ij} \\ &= A_{11}B_{11} + A_{22}B_{22} + A_{33}B_{33} + 2A_{23}B_{23} + 2A_{13}B_{13} + 2A_{12}B_{12}\end{aligned} \tag{1.71}$$

Los tensores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se pueden representar mediante las matrices columna $\{\mathbf{A}\}$ y $\{\mathbf{B}\}$ de la forma:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{A}\} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{13} & A_{12}\end{bmatrix}^T \\ \{\mathbf{B}\} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{13} & B_{12}\end{bmatrix}^T\end{aligned} \tag{1.72}$$

Sin embargo, en la notación de Voigt se establece que la operación tensorial $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ es equivalente a la operación matricial $\{\mathbf{A}\}^T\{\mathbf{B}\}$, lo cual hace necesario realizar *una* de las siguientes modificaciones:

- Considerar que los últimos tres términos de la matriz columna $\{\mathbf{A}\}$, es decir A_{23}, A_{13}, A_{12} están multiplicados por 2.

- Considerar que los últimos tres términos de la matriz columna $\{\mathbf{B}\}$, es decir B_{23}, B_{13}, B_{12} están multiplicados por 2.

- Considerar que los últimos tres términos de ambas matrices columna $\{\mathbf{A}\}$ y $\{\mathbf{B}\}$, están multiplicados por un factor $\sqrt{2}$.

Suponiendo que los últimos tres términos de la matriz columna $\{\mathbf{B}\}$ se multiplican por 2, la operación $\{\mathbf{A}\}^T\{\mathbf{B}\}$ será igual a:

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{13} & A_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ 2B_{23} \\ 2B_{13} \\ 2B_{12}\end{bmatrix} \\ &= A_{11}B_{11} + A_{22}B_{22} + A_{33}B_{33} + 2A_{23}B_{23} + 2A_{13}B_{13} + 2A_{12}B_{12}\end{aligned} \tag{1.73}$$

Es habitual que las entidades asociadas a la cinemática como el campo de la deformación incluyan un factor de 2 en los tres últimos términos de la matriz columna como se explicará más adelante.

Por otro lado, las componentes de un tensor simétrico de cuarto orden $\mathbf{C}$ se pueden expresar mediante una matriz cuadrada tamaño 6. Si de nuevo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son tensores simétricos de segundo orden, la operación tensorial $\mathbf{A}=\mathbf{C}:\mathbf{B}$, escrita en notación indicial como $A_{ij} = C_{ijkl}B_{kl}$, también puede expresarse matricialmente en notación de Voigt de la

forma $\{\mathbf{A}\}=[\mathbf{C}]\{\mathbf{B}\}$. Dada la simetría menor del tensor **C**, es decir $C_{ijkl}=C_{ijlk}$ y $C_{ijkl}=C_{jikl}$, las componentes del tensor **A** resultante de la operación son los siguientes:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= C_{ij11}B_{11}+C_{ij22}B_{22}+C_{ij33}B_{33} \\ &\quad + 2C_{ij23}B_{23}+2C_{ij13}B_{13}+2C_{ij12}B_{12} \end{aligned} \tag{1.74}$$

Considerando que los últimos tres términos de la matriz columna $\{\mathbf{B}\}$ están multiplicados por 2, se puede expresar la matriz columna $\{\mathbf{A}\}$ en notación de Voigt como:

$$\{\mathbf{A}\}=[\mathbf{C}]\{\mathbf{B}\}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{23} \\ A_{13} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ 2B_{23} \\ 2B_{13} \\ 2B_{12} \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

La matriz $[\mathbf{C}]$ es la representación del tensor de cuarto orden **C** en notación de Voigt, la cual conserva su simetría en virtud de la simetría menor y mayor $(C_{ijkl}=C_{klij})$ del tensor **C**.

1.6.9. Valores y direcciones principales de un tensor de segundo orden

En mecánica del continuo es frecuente encontrar ecuaciones homogéneas de la forma:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{1.76}$$

siendo **A** un tensor de segundo orden conocido, **x** un vector y λ un escalar ambos desconocidos.

Las componentes del tensor **A** en un sistema coordenado con vectores base $\mathbf{e}_i$ conforman la matriz $[\mathbf{A}]=(A_{ij})$. De igual forma, las componentes del vector **x** en el mismo sistema coordenado se organizan en una matriz columna $\{\mathbf{x}\}=(x_i)$. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir en notación matricial así:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}=\lambda\{\mathbf{x}\}\rightarrow([\mathbf{A}]-\lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{x}\}=\{0\} \tag{1.77}$$

donde $[\mathbf{I}]$ es la matriz identidad de orden 3, $[\mathbf{A}]$ es una matriz cuadrada conocida de 3 por 3 que contienen las componentes del tensor **A**, mientras que $\{\mathbf{x}\}$ y λ son cantidades desconocidas que corresponden a una matriz columna y a un escalar.

Además de la solución trivial $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\}$, la expresión anterior tiene solución para $\{\mathbf{x}\}$ si se cumple la *ecuación característica* de la matriz $[\mathbf{A}]$ indicada a continuación.

$$\det([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{I}]) = 0 \tag{1.78}$$

Cuando se desarrolla el determinante se obtiene una ecuación cúbica para λ con tres raíces $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ denominadas *valores propios* o *eigen valores* de $[\mathbf{A}]$, las cuales pueden ser números reales o complejos. En particular, los valores propios de una matriz simétrica real son cantidades reales.

Suponiendo que $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ son diferentes entre sí, la expresión

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(1)} = \lambda_{(1)}\{\mathbf{x}\}^{(1)} \rightarrow ([\mathbf{A}] - \lambda_{(1)}[\mathbf{I}])\{\mathbf{x}\}^{(1)} = \{0\} \tag{1.79}$$

tiene una solución no trivial $\{\mathbf{x}\}^{(1)}$ la cual está indeterminada por un multiplicador escalar arbitrario diferente de cero. La matriz columna $\{\mathbf{x}\}^{(1)}$ se denomina *vector propio* o *eigen vector* de $[\mathbf{A}]$ asociado al valor propio $\lambda_{(1)}$. De forma similar se definen los vectores propios $\{\mathbf{x}\}^{(2)}$ y $\{\mathbf{x}\}^{(3)}$ asociados a los valores propios $\lambda_{(2)}$ y $\lambda_{(3)}$, respectivamente.

Si los valores propios de una matriz simétrica son diferentes, los vectores propios tienen la propiedad de ser ortogonales entre sí, es decir,

$$\{\mathbf{x}\}^{(r)T}\{\mathbf{x}\}^{(s)} = 0 \quad (r \neq s) \quad (r, s = \{1,2,3\}) \tag{1.80}$$

Para escoger adecuadamente el multiplicador escalar, cada vector propio se puede normalizar de la forma:

$$\{\mathbf{x}\}^{(r)T}\{\mathbf{x}\}^{(s)} = 1 \quad (r = s) \quad (r, s = \{1,2,3\}) \tag{1.81}$$

La ecuación anterior redefine las matrices columna $\{\mathbf{x}\}^{(1)}, \{\mathbf{x}\}^{(2)}, \{\mathbf{x}\}^{(3)}$ como los *vectores propios normalizados* de la matriz $[\mathbf{A}]$.

Se construye la matriz $[\mathbf{P}]$ (de 3 por 3), ubicando un vector propio normalizado transpuesto $\{\mathbf{x}\}^{(r)T}$ (de 1 por 3) en cada una de sus filas, así:

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{x}\}^{(1)T} \\ \{\mathbf{x}\}^{(2)T} \\ \{\mathbf{x}\}^{(3)T} \end{bmatrix} \tag{1.82}$$

$$[\mathbf{P}]^T = \left[\{\mathbf{x}\}^{(1)} \quad \{\mathbf{x}\}^{(2)} \quad \{\mathbf{x}\}^{(3)}\right] \tag{1.83}$$

En virtud de las propiedades indicadas en las Ecuaciones (1.80) y (1.81), la matriz $[\mathbf{P}]$ es ortogonal.

Repitiendo la Ecuación (1.79) para los demás vectores propios, es decir, $[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(2)} = \lambda_{(2)}\{\mathbf{x}\}^{(2)}$, $[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(3)} = \lambda_{(3)}\{\mathbf{x}\}^{(3)}$, se puede escribir la siguiente expresión matricial:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}][\mathbf{P}]^T &= \left[[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(1)} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(2)} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(3)}\right] \\ &= \left[\lambda_{(1)}\{\mathbf{x}\}^{(1)} \quad \lambda_{(2)}\{\mathbf{x}\}^{(2)} \quad \lambda_{(3)}\{\mathbf{x}\}^{(3)}\right]\end{aligned} \tag{1.84}$$

Premultiplicando la ecuación anterior por $[\mathbf{P}]$ se obtiene:

$$[\mathbf{P}][\mathbf{A}][\mathbf{P}]^T = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{bmatrix} \tag{1.85}$$

éste resultado es una matriz diagonal que contiene los valores propios de $[\mathbf{A}]$.

En particular, si dos valores principales son iguales, por ejemplo si $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} \neq \lambda_{(3)}$, el vector propio $\{\mathbf{x}\}^{(3)}$ está definido, en cambio los vectores propios $\{\mathbf{x}\}^{(1)}$ y $\{\mathbf{x}\}^{(2)}$ corresponden a cualquier vector ortogonal a $\{\mathbf{x}\}^{(3)}$. Con el fin de obtener una matriz de transformación ortogonal $[\mathbf{P}]$, se escogen los vectores propios $\{\mathbf{x}\}^{(1)}$ y $\{\mathbf{x}\}^{(2)}$ ortogonales entre sí, manteniendo la validez de las ecuaciones (1.80) a (1.85).

Si los tres valores propios son iguales, es decir si $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$, cualquier vector corresponde a uno de los vectores propios de la matriz $[\mathbf{A}]$. Para conformar una matriz de transformación ortogonal $[\mathbf{P}]$, los vectores propios se escogen como cualquier grupo de tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Sea **A** un tensor de segundo orden que se expresa mediante sus componentes A_{ij} en la base $\mathbf{e}_i$ en la matriz $[\mathbf{A}] = (A_{ij})$ o mediante sus componentes $\bar{A}_{ij}$ en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$, conformando la matriz $[\bar{\mathbf{A}}] = (\bar{A}_{ij})$.

A partir de la ecuación característica de la matriz $[\mathbf{A}]$ expresada de la forma $\det([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{I}]) = 0$ y recordando que $[\mathbf{A}] = [\mathbf{M}]^T[\bar{\mathbf{A}}][\mathbf{M}]$ y

$[\mathbf{I}] = [\mathbf{M}]^T [\mathbf{I}][\mathbf{M}]$ siendo $[\mathbf{M}]$ la matriz de transformación, se deduce lo siguiente:

$$\det\left([\mathbf{M}]^T [\bar{\mathbf{A}}][\mathbf{M}] - \lambda[\mathbf{I}]\right) = 0$$
$$\det\left\{[\mathbf{M}]^T \left([\bar{\mathbf{A}}] - \lambda[\mathbf{I}]\right)[\mathbf{M}]\right\} = 0$$
$$\det[\mathbf{M}]^T \det\left([\bar{\mathbf{A}}] - \lambda[\mathbf{I}]\right)\det[\mathbf{M}] = 0$$

Dado que la matriz de transformación $[\mathbf{M}]$ es ortogonal y por lo tanto:

$$\det[\mathbf{M}]^T = \det[\mathbf{M}]^{-1} = 1/\det[\mathbf{M}]$$
$$\rightarrow \det[\mathbf{M}]\det[\mathbf{M}]^T = 1$$

se concluye que:

$$\det\left([\bar{\mathbf{A}}] - \lambda[\mathbf{I}]\right) = 0 \qquad (1.86)$$

donde λ es un valor propio de la matriz $[\bar{\mathbf{A}}]$. Los valores propios de la matriz de componentes del tensor **A** son cantidades intrínsecas e independientes del sistema coordenado de referencia.

Si **A** es un tensor simétrico sus valores propios serán tres números reales $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$ denominados *componentes principales* o *valores principales* de **A**. Si además $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$ son positivos, **A** se denomina *tensor definido positivo*. Los vectores propios del tensor **A** indicados como $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ se denominan *direcciones principales*.

Si los valores principales son distintos las direcciones principales son mutuamente ortogonales. En cambio, si dos o tres valores principales son iguales, las direcciones principales dadas por los vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ no estarán definidas de forma única.

Si dos valores principales son iguales, por ejemplo si $A_{(1)} = A_{(2)} \neq A_{(3)}$, el vector propio $\mathbf{x}^{(3)}$ está definido, mientras que los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ corresponden a cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{x}^{(3)}$. Asimismo, cuando los tres valores principales son iguales, es decir si $A_{(1)} = A_{(2)} = A_{(3)}$, todo vector unitario es un vector propio del tensor **A**.

Con el fin de conformar un sistema coordenado con las direcciones principales, se establece que los vectores propios $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ sean vectores unitarios mutuamente ortogonales. Por lo tanto, el *sistema coordenado principal* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ se define como a aquel sistema coordenado cartesiano derecho conformado por tres ejes denominados *ejes principales*, los cuales son paralelos a tres vectores unitarios llamados *vectores base principal* $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

1.6.10. Invariantes de un tensor de segundo orden

Es importante ratificar que los valores principales $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ son independientes del sistema coordenado escogido, dándoles el carácter de invariantes del tensor **A**.

Sea **A** un tensor de segundo orden, se define la traza de **A** como el escalar obtenido de la forma:

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{1} : \mathbf{A} \tag{1.87}$$

Dadas las componentes del tensor A_{ij} definidas en sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$, la ecuación anterior se puede expresar en notación indicial como:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathbf{A} &= \delta_{ij} A_{ij} \\ &= A_{11} + A_{22} + A_{33} \end{aligned} \tag{1.88}$$

Sustituyendo la relación entre las componentes del tensor en dos bases diferentes $A_{ij} = M_{pi} M_{qj} \overline{A}_{pq}$, en la expresión previa se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathbf{A} &= \delta_{ij} M_{pi} M_{qj} \overline{A}_{pq} \\ &= M_{jp} M_{qj} \overline{A}_{pq} \\ &= \delta_{pq} \overline{A}_{pq} = \delta_{ij} \overline{A}_{ij} \end{aligned} \tag{1.89}$$

Lo anterior demuestra que la traza del tensor **A** cuyos componentes $\overline{A}_{ij}$ están definidos en la base $\overline{\mathbf{e}}_i$ es igual a $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \delta_{ij} \overline{A}_{ij}$ y en general la traza de un tensor de segundo orden es independiente del sistema coordenado utilizado.

Si los vectores base del sistema coordenado coinciden con las direcciones principales, la matriz de componentes será una matriz diagonal, cuyos coeficientes corresponden a los valores propios $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$ y por lo tanto:

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(3)} \tag{1.90}$$

De éste resultado se observa que la traza del tensor **A** es un invariante obtenida de la suma de tres cantidades invariantes.

Se define el tensor simétrico de segundo orden $\mathbf{A}^2$ como el resultado del producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ en notación compacta y $\left(\mathbf{A}^2\right)_{ij} = A_{ik} A_{kj}$ en notación indicial. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 &= \delta_{ij} A_{ik} A_{kj} = \delta_{ij} A_{jk} A_{ik} = A_{ik} A_{ik} \\ &= A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + 2A_{12}^2 + 2A_{13}^2 + 2A_{23}^2\end{aligned} \tag{1.91}$$

Asimismo se define el tensor simétrico de segundo orden $\mathbf{A}^3$ como el resultado del producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ en notación compacta y $\left(\mathbf{A}^3\right)_{ij} = A_{ik} A_{kl} A_{lj}$ en notación indicial.

En un sistema coordenado dado por los vectores propios se tienen tres funciones simétricas invariantes a partir de los valores principales $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}$, de la forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{A} &= A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(3)} \\ \mathrm{tr}\mathbf{A}^2 &= \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = A_{(1)}^2 + A_{(2)}^2 + A_{(3)}^2 \\ \mathrm{tr}\mathbf{A}^3 &= \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = A_{(1)}^3 + A_{(2)}^3 + A_{(3)}^3\end{aligned} \tag{1.92}$$

Observación. *La traza de **A** es igual considerando las componentes en cualquier sistema coordenado, por lo tanto* $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ *es un invariante de **A**. Asimismo, se puede demostrar que* $\mathrm{tr}\mathbf{A}^2$ *,* $\mathrm{tr}\mathbf{A}^3$ *también son un invariantes del tensor **A**. Por otro lado, el determinante de **A** es una cantidad invariante porque está definida en función de las trazas* $\mathrm{tr}\mathbf{A}$*,* $\mathrm{tr}\mathbf{A}^2$ *y* $\mathrm{tr}\mathbf{A}^3$.

El grupo más común de funciones simétricas invariantes de **A** son las siguientes:

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathrm{tr}\mathbf{A} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\right\} \\ I_3 &= \det \mathbf{A} = \tfrac{1}{3}\left\{\mathrm{tr}\mathbf{A}^3 - I_1 \mathrm{tr}\mathbf{A}^2 + I_2 \mathrm{tr}\mathbf{A}\right\}\end{aligned} \tag{1.93}$$

Aplicando el *teorema de Cayley-Hamilton* para **A** se cumple que:

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{1.94}$$

donde **0** es el tensor cero de segundo orden.

1.6.11. Obtención de los valores y direcciones principales de un tensor simétrico de segundo orden

Los valores principales y las direcciones principales de un tensor simétrico de segundo orden se obtienen de la solución no trivial de la

ecuación homogénea presentada en la expresión (1.77), a partir de las componentes del tensor en una base específica.

Reescribiendo la Ecuación (1.77) indicada en términos de sus componentes en la base $\mathbf{e}_i$, de la forma:

$$\begin{bmatrix} (A_{11}-\lambda) & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & (A_{22}-\lambda) & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & (A_{33}-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.95}$$

se obtiene la solución no trivial para λ cuando el determinante de la matriz $([\mathbf{A}]-\lambda[\mathbf{I}])$ es igual a cero mediante la ecuación cúbica:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{1.96}$$

donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ I_2 &= A_{11}A_{22} + A_{11}A_{33} + A_{22}A_{33} - A_{12}^2 - A_{13}^2 - A_{23}^2 \\ I_3 &= A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 \end{aligned} \tag{1.97}$$

De acuerdo con el *método de Cardano*, las tres raíces reales de la ecuación cúbica mostrada anteriormente son:

$$\begin{aligned} \lambda_{(a)} &= 2S\left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\alpha\right)\right] + \tfrac{1}{3}I_1 \\ \lambda_{(b)} &= 2S\left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right] + \tfrac{1}{3}I_1 \\ \lambda_{(c)} &= 2S\left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] + \tfrac{1}{3}I_1 \end{aligned} \tag{1.98}$$

siendo,

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{3}I_1^2 - I_2 \\ Q &= \tfrac{1}{3}I_1I_2 - I_3 - \tfrac{2}{27}I_1^3 \\ T &= \left(\tfrac{1}{27}R^3\right)^{1/2} \\ S &= \left(\tfrac{1}{3}R\right)^{1/2} \\ \alpha &= \arccos\left(-\frac{Q}{2T}\right) \end{aligned}$$

Los valores principales $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ corresponden con las raíces obtenidas $\lambda_{(a)}, \lambda_{(b)}, \lambda_{(c)}$ reorganizadas de mayor a menor tal forma que $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$, es decir:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= \max\left[\lambda_{(a)}, \lambda_{(b)}, \lambda_{(c)}\right] \\ \lambda_{(3)} &= \min\left[\lambda_{(a)}, \lambda_{(b)}, \lambda_{(c)}\right] \\ \lambda_{(2)} &\in \left[\lambda_{(a)}, \lambda_{(b)}, \lambda_{(c)}\right] \forall \lambda_{(3)} < \lambda_{(2)} < \lambda_{(1)} \end{aligned} \tag{1.99}$$

Por otro lado, las direcciones principales se obtienen resolviendo simultáneamente la ecuación de segundo orden que define al vector $\mathbf{x}^{(p)}$ como unitario, es decir, $\left(x_1^{(p)}\right)^2 + \left(x_2^{(p)}\right)^2 + \left(x_3^{(p)}\right)^2 = 1$ y dos ecuaciones lineales independientes dadas al sustituir un valor principal específico $\lambda_{(p)}$ en la Ecuación (1.95), así:

$$\begin{bmatrix} (A_{11} - \lambda_{(p)}) & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & (A_{22} - \lambda_{(p)}) & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & (A_{22} - \lambda_{(p)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(p)} \\ x_2^{(p)} \\ x_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.100}$$

Finalmente las componentes de los vectores propios que indican las direcciones principales son:

$$x_1^{(p)} = \frac{\wp_1^{(p)}}{\overline{\wp}^{(p)}} \quad x_2^{(p)} = \frac{\wp_2^{(p)}}{\overline{\wp}^{(p)}} \quad x_3^{(p)} = \frac{\wp_3^{(p)}}{\overline{\wp}^{(p)}} \tag{1.101}$$

siendo,

$$\wp_1^{(p)} = \det\begin{bmatrix} (A_{22} - \lambda_{(p)}) & A_{23} \\ A_{23} & (A_{33} - \lambda_{(p)}) \end{bmatrix}$$

$$\wp_2^{(p)} = -\det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{23} \\ A_{13} & (A_{33} - \lambda_{(p)}) \end{bmatrix}$$

$$\wp_3^{(p)} = \det\begin{bmatrix} A_{12} & (A_{22} - \lambda_{(p)}) \\ A_{13} & A_{23} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\wp}^{(p)} = \sqrt{\left(\wp_1^{(p)}\right)^2 + \left(\wp_2^{(p)}\right)^2 + \left(\wp_3^{(p)}\right)^2}$$

Ejemplo 1.4. Sea **A** un tensor simétrico de segundo orden cuyas componentes con respecto a un sistema coordenado $x_1 x_2 x_3$ son:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular los valores y vectores principales del tensor **A**.

Se plantea un sistema homogéneo de ecuaciones simultáneas de la forma:

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda_{(p)}) & 1 & 3 \\ 1 & (-1-\lambda_{(p)}) & 1 \\ 3 & 1 & (3-\lambda_{(p)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(p)} \\ x_2^{(p)} \\ x_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene la solución no trivial para $\lambda_{(p)}$ cuando el determinante de la matriz del lado izquierdo de la ecuación es igual a cero, de lo cual se deriva una ecuación cúbica de la forma:

$$\lambda_{(p)}^3 - I_1 \lambda_{(p)}^2 + I_2 \lambda_{(p)} - I_3 = 0$$

donde:

$$I_1 = 1 - 1 + 3 = 3$$

$$I_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 - 1^2 - 3^2 - 1^2 = -12$$

$$I_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1^2 - (-1) \cdot 3^2 - 3 \cdot 1^2 = 8$$

Los parámetros del método de Cardano son iguales a:

$$R = \tfrac{1}{3} \cdot 3^2 - (-12) = 15$$

$$Q = \tfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot (-12) - 8 - \tfrac{2}{27} \cdot 3^3 = -22$$

$$T = \left(\tfrac{1}{27} \cdot 15^3\right)^{1/2} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125}$$

$$S = \left(\tfrac{1}{3} \cdot 15\right)^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{(-22)}{2\sqrt{125}} \right) = 0.179853 \,\text{rad} \rightarrow \frac{\alpha}{3} = 0.059951 \,\text{rad}$$

Las tres raíces reales de la ecuación cúbica mostrada anteriormente se obtienen de la forma:

$$\lambda_{(a)} = 2\sqrt{5}\left[\cos\left(0.059951\right)\right] + \tfrac{1}{3}\cdot 3 = 5.46410$$
$$\lambda_{(b)} = 2\sqrt{5}\left[\cos\left(0.059951 + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right] + \tfrac{1}{3}\cdot 3 = -1.46410$$
$$\lambda_{(c)} = 2\sqrt{5}\left[\cos\left(0.059951 + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] + \tfrac{1}{3}\cdot 3 = -1.00000$$

Estos últimos resultados corresponden a valores principales diferentes del tensor simétrico de segundo orden **A**. Ordenados de mayor a menor se pueden indicar como:

$$\lambda_{(1)} = 5.46410 \quad , \quad \lambda_{(2)} = -1.00000 \quad , \quad \lambda_{(3)} = -1.46410$$

Para obtener la dirección principal asociada con el valor $\lambda_{(1)} = 5.46410$ se calculan los siguientes parámetros:

$$\wp_1^{(1)} = 14.9282 \quad , \quad \wp_1^{(2)} = 5.46410 \quad , \quad \wp_1^{(3)} = 20.3923$$

$$\overline{\wp}^{(1)} = 25.8564$$

Por lo tanto el vector direccional

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{14.9282}{25.8564}\mathbf{e}_1 + \frac{5.46410}{25.8564}\mathbf{e}_2 + \frac{20.3923}{25.8564}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{x}^{(1)} = 0.5773\mathbf{e}_1 + 0.2113\mathbf{e}_2 + 0.7887\mathbf{e}_3$$

De la misma forma se obtienen las direcciones principales asociada con los valores propios $\lambda_{(2)} = -1.00000$ y $\lambda_{(3)} = -1.46410$, con los siguientes resultados:

$$\mathbf{x}^{(2)} = -0.5773\mathbf{e}_1 - 0.5773\mathbf{e}_2 + 0.5773\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{x}^{(3)} = 0.5773\mathbf{e}_1 - 0.7887\mathbf{e}_2 - 0.2113\mathbf{e}_3$$

1.6.12. Parte esférica y desviadora de un tensor

La parte esférica de un tensor simétrico de segundo orden **A** o tensor esférico es un tensor isótropo cuyas componentes corresponden al promedio entre sus valores propios, es decir:

$$\mathbf{A}^{esf} = \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\mathrm{tr}\mathbf{A} \tag{1.102}$$

En mecánica del continuo es habitual descomponer el tensor **A** en la suma de una parte desviadora $\mathbf{A}^{dev}$ y una parte esférica $\mathbf{A}^{esf}$, es decir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{dev} + \mathbf{A}^{esf} = \mathbf{A}^{dev} + \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\mathbf{A} \qquad (1.103)$$

Por lo tanto la *parte desviadora* de **A** o *tensor desviador* $\mathbf{A}^{dev}$ se define como:

$$\mathbf{A}^{dev} = \mathbf{A} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\mathbf{A} \qquad (1.104)$$

donde se observa que su primer invariante $I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A}^{dev}$ es igual a cero.

Ejemplo 1.5. Siendo **A** un tensor de segundo orden, demostrar que la traza de su parte desviadora es igual a cero, es decir $\mathrm{tr}\mathbf{A}^{dev} = 0$.

La parte desviadora del tensor **A** está definida como:

$$\mathbf{A}^{dev} = \mathbf{A} - (\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$$

Si la traza de la suma de dos tensores es la suma de las trazas de cada uno, se establece que:

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}^{dev} = \mathrm{tr}\mathbf{A} - (\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathrm{tr}\mathbf{1}$$

Recordando que $(\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})$ es una cantidad escalar que se multiplica al tensor **1** y por lo tanto $\mathrm{tr}\left[(\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}\right] = (\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathrm{tr}\mathbf{1}$. Siendo la traza del tensor unidad igual a 3 se concluye que:

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}^{dev} = \mathrm{tr}\mathbf{A} - (\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})(3) = \mathrm{tr}\mathbf{A} - \mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$$

Ejemplo 1.6. Dado un tensor simétrico de segundo orden **A**, demostrar que las direcciones principales del tensor **A** y de su parte desviadora $\mathbf{A}^{dev}$ son iguales. Establecer la relación entre los valores principales de los tensores **A** y $\mathbf{A}^{dev}$.

Sean $\mathbf{x}^{(n)}$ los vectores principales y $\lambda^{(n)}$ los valores principales de un tensor de segundo orden **A**, tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{(n)} = \lambda^{(n)}\mathbf{x}^{(n)}$.
Definida la parte desviadora del tensor **A** como $\mathbf{A}^{dev} = \mathbf{A} - (\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$, los valores y vectores principales del tensor $\mathbf{A}^{dev}$ se obtienen de la solución de una ecuación homogénea de la forma:

$$\mathbf{A}^{dev} \cdot \mathbf{x}^{dev(n)} = \lambda^{dev(n)} \mathbf{x}^{dev(n)}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{dev(n)} - (\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}^{dev(n)} = \lambda^{dev(n)} \mathbf{x}^{dev(n)}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{dev(n)} = (\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A} + \lambda^{dev(n)}) \mathbf{x}^{dev(n)}$$

Comparando la ecuación $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(n)} = \lambda^{(n)} \mathbf{x}^{(n)}$ con la expresión anterior se concluye que los vectores principales son $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{dev(n)}$ y que los valores principales son $\lambda^{(n)} = \tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A} + \lambda^{dev(n)}$.

Ejemplo 1.7. Calcular los valores y las direcciones principales de la parte esférica de un tensor de segundo orden $\mathbf{A}^{esf}$.

Sean $\mathbf{x}^{(n)}$ los vectores principales y $\lambda^{(n)}$ los valores principales de un tensor de segundo orden **A**, tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(n)} = \lambda^{(n)} \mathbf{x}^{(n)}$.
Definida la parte esférica del tensor **A** como $\mathbf{A}^{esf} = (\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$, los valores y vectores principales del tensor $\mathbf{A}^{esf}$ se obtienen de la ecuación homogénea de la forma:

$$\mathbf{A}^{esf} \cdot \mathbf{x}^{esf(n)} = \lambda^{esf(n)} \mathbf{x}^{esf(n)}$$
$$(\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}^{esf(n)} = \lambda^{esf(n)} \mathbf{x}^{esf(n)}$$
$$(\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A} - \lambda^{esf(n)}) \mathbf{x}^{esf(n)} = \mathbf{0}$$

Además de la solución trivial $\mathbf{x}^{esf(n)} = \mathbf{0}$, la ecuación anterior establece que $\tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A} - \lambda^{esf(n)} = 0$ para todo $\mathbf{x}^{esf(n)} \neq \mathbf{0}$. En consecuencia los valores principales son iguales a $\lambda^{esf(n)} = \tfrac{1}{3} \mathrm{tr}\mathbf{A}$, y cualquier vector $\mathbf{x}^{esf(n)}$ indica una dirección principal.

1.7. Calculo tensorial

1.7.1. Operador nabla y gradiente de un campo escalar o vectorial

En general, se indica con el símbolo ∇ al operador nabla definido como un vector operador diferencial en términos de las derivadas parciales con respecto a la posición (x_1, x_2, x_3), de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{1.105}$$

Sea $\phi(\mathbf{x})$ un campo escalar en términos de la posición $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$, se define como el *gradiente* de ϕ al vector obtenido de aplicar el operador nabla sobre el campo escalar de la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\phi = \nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{1.106}$$

La dirección del gradiente de ϕ es normal a una superficie $\phi(\mathbf{x}) = cte$ y su magnitud es la derivada direccional de ϕ con respecto a esa normal, como se indica en la **Figura 1.6**.

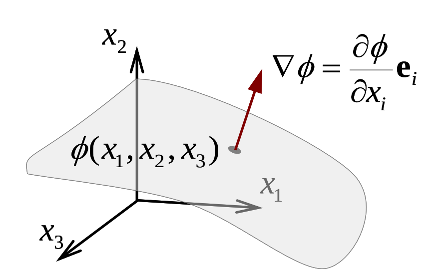


Figura 1.6. Superficie generada por la función $\phi(x_1, x_2, x_3) = cte$

La derivada direccional de un campo escalar ϕ en dirección de un vector $\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i$ es un escalar definido como:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\nabla\phi &= n_i\mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \\ &= n_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+n_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+n_3\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\end{aligned} \tag{1.107}$$

Éste resultado indica el cambio de ϕ en la dirección **n**.

Observación. *Campo escalar, vectorial o tensorial es una función que define una cantidad escalar, un vector o un tensor respectivamente para cada posición en el espacio **x**.*

En general el operador nabla también puede aplicarse sobre un *campo vectorial* obteniendo como resultado un tensor de segundo orden no simétrico. El *tensor derivada o gradiente* de un campo vectorial **a**(**x**) corresponde al producto diádico:

$$\mathbf{a}\otimes\nabla=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{1.108}$$

Comúnmente en la mecánica del continuo se utiliza la parte simétrica del tensor derivada, obteniendo el *gradiente simétrico* de un campo vectorial **a**(**x**) de la forma:

$$\nabla^s\mathbf{a}=\tfrac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{a}+\mathbf{a}\otimes\nabla\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{1.109}$$

Es habitual omitir el símbolo del producto diádico para indicar al gradiente del campo vectorial, de tal forma que $\operatorname{grad}\mathbf{a}$ se puede representar como $\nabla\mathbf{a}$.

En notación matricial, el gradiente de un campo escalar, vectorial o tensorial es igual al vector de operadores diferenciales o operador nabla $[\nabla]=\left[\partial/\partial x_1 \quad \partial/\partial x_2 \quad \partial/\partial x_3\right]^T$ aplicado sobre la matriz de componentes del campo escalar, vectorial o tensorial como se indica en el **Cuadro 1.1**. En particular, la matriz de componentes del tensor gradiente del vector **a** definido en la Ecuación (1.108) es de la forma:

$$[\mathbf{a}][\nabla]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

1.7.2. Divergencia de un campo vectorial o tensorial

Sea $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ un campo vectorial en función de la posición $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, es decir, $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i$, la divergencia de **a** es el escalar obtenido del producto interior entre el operador nabla y el mismo vector **a**, así:

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{1.110}$$

De manera similar, la divergencia de un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_{ij}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ es igual al vector:

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\mathbf{e}_j \tag{1.111}$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_3} \right)\mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right)\mathbf{e}_3$$

Ejemplo 1.8. Dado un campo vectorial de la forma $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 10x_1x_2\mathbf{e}_1 + 3x_2\mathbf{e}_2 - 7x_1x_3\mathbf{e}_3$, calcular el gradiente y la divergencia de **a**.

El gradiente de un campo vectorial **a** en un sistema de vectores base $\mathbf{e}_i$ está definido como un tensor de segundo orden de la forma:

$$\text{gra } \mathbf{a} = \mathbf{a} \otimes \nabla = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

cuyas componentes representadas en notación matricial son el resultado de la operación:

$$[\mathbf{a}][\nabla]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Derivando las componentes de **a** con respecto a las coordenadas x_1, x_2, x_3, se obtiene:

$$[\text{gra } \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 10x_1x_2 \\ 3x_2 \\ -7x_1x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_2 & 10x_1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7x_3 & 0 & -7x_1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la divergencia del campo vectorial **a** en un sistema de vectores base $\mathbf{e}_i$ está definido como un escalar de la forma:

$$\text{div}\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Sustituyendo las derivadas de **a** con respecto a las coordenadas x_1, x_2, x_3, se obtiene:

$$\text{div}\mathbf{a} = -7x_1 + 10x_2 + 3$$

1.7.3. Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia o teorema de Gauss establece que si un campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in V$ tiene derivadas parciales de primer orden continuas en todos los puntos de un volumen V acotado por una superficie ∂V (**Figura 1.7**), se cumple que:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,dV = \int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}dS$$
$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} n_i a_i dS \tag{1.112}$$

donde **n** es un vector normal unitario a la superficie ∂V en la posición **x**.

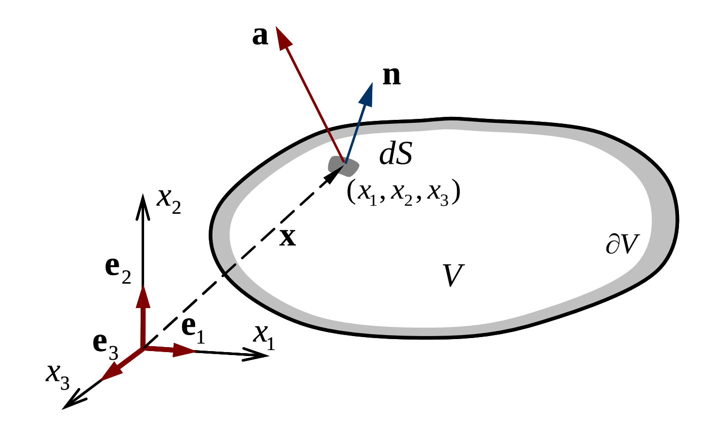


Figura 1.7. Campo vectorial evaluado en la posición **x** de un sólido

Aplicando el teorema de la divergencia a un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \;\forall \mathbf{x} \in V$ se obtiene:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV = \int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\,dS$$
$$\int_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} n_i A_{ij} dS \tag{1.113}$$

Capítulo 2
Descripción del esfuerzo

El *esfuerzo* es una medida de la intensidad de la fuerza expresada como la fuerza distribuida por unidad de área, ocurrente dentro de un cuerpo o sobre su contorno. En la mecánica del medio continuo un cuerpo se considera libre de esfuerzos, si las únicas acciones presentes son las fuerzas interatómicas necesarias para mantener unidas las partículas del mismo. El interés de este capítulo es definir y describir el esfuerzo en una partícula considerando su representación tensorial (Lai & Saibel 1965; Spencer 1990; Mase & Mase 1999; Holzapfel 2000; Oliver & Agelet 2002; Reddy 2004; Kojic & Bathe 2005; Wu 2005).

2.1. Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

Según su distribución en el espacio, las fuerzas se pueden clasificar en fuerzas de cuerpo y en fuerzas de superficie. En la **Figura 2.1** se ilustran los diferenciales de fuerzas de superficie actuando sobre un elemento infinitesimal de área *dS* y los diferenciales de fuerzas de cuerpo actuando sobre un elemento infinitesimal de volumen *dV*.

- Las *fuerzas de cuerpo* son acciones distribuidas en el volumen del sólido las cuales actúan a distancia como por ejemplo las fuerzas gravitacionales, inerciales o magnéticas. Tales fuerzas se representan como una cantidad vectorial $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ que indica la fuerza por unidad de masa. Considerando una densidad constante

del cuerpo ρ, la fuerza de cuerpo por unidad de volumen se escribe como $\rho\mathbf{b} = \rho b_i \mathbf{e}_i$.

- Las *fuerzas de superficie* son acciones distribuidas en una superficie específica en el contorno del sólido o dentro de él, que actúan por contacto directo con otro cuerpo. Estas fuerzas por unidad de área se representan mediante el vector $\mathbf{t}^* = t_i^* \mathbf{e}_i$.

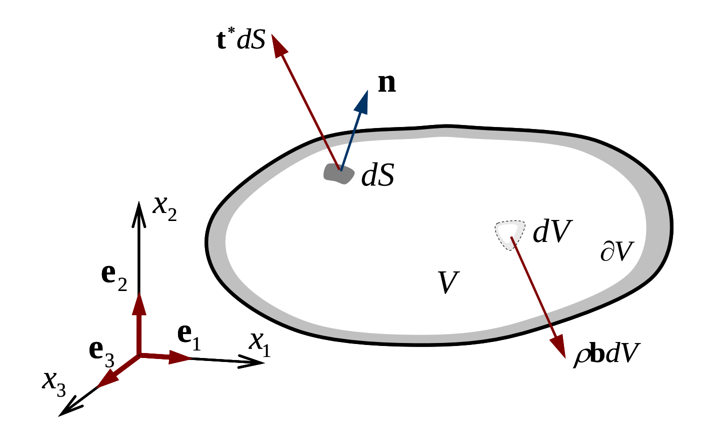


Figura 2.1. Fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo un sólido

2.2. Vector tracción

Considerando la existencia de fuerzas actuantes en el interior de un cuerpo, sea P un punto en la posición $\mathbf{X}^P$ ocupado por una partícula y S una superficie definida por un vector unitario normal a ella $\mathbf{n}$, la cual contiene a P, como lo ilustra la **Figura 2.2**.

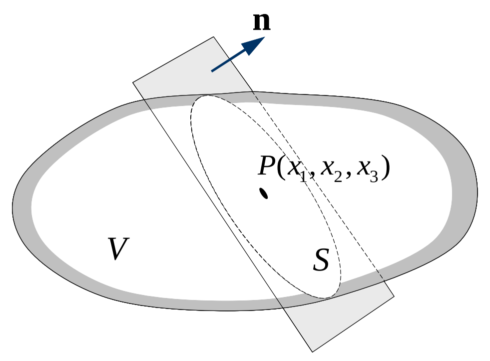


Figura 2.2. Partícula en el interior de un sólido y contenida en una superficie de normal **n**.

El *vector tracción* o también denominado vector de esfuerzos $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{X}^{(p)},\mathbf{n}) = t_i^{(n)}\mathbf{e}_i$ en el punto P sobre la superficie de normal $\mathbf{n}$ (**Figura 2.3**), se define como el límite de la fuerza $\delta\mathbf{p}$ transmitida en un diferencial de área δS cuando tal área tiende a cero, es decir,

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta S} \tag{2.1}$$

Por lo tanto las componentes del vector tracción se expresan en unidades de fuerza divididas en unidades de área.

> ***Observación.*** *Es importante recordar que el vector tracción* $\mathbf{t}^{(n)}$ *depende de la posición del punto de aplicación P y de la dirección de la superficie* $\mathbf{n}$. *Por otro lado, en general* $\mathbf{t}^{(n)}$ *no coincide con la dirección* $\mathbf{n}$, *dado que la fuerza transmitida a través de una superficie no necesariamente actúa en la dirección normal a la superficie.*

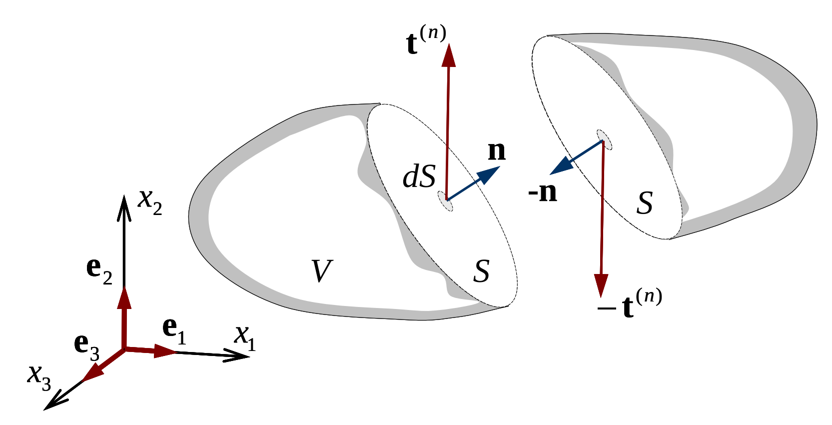


Figura 2.3. Vector tracción en un punto P actuando sobre una superficie de normal $\mathbf{n}$.

2.3. Postulados de Cauchy

Sea $\mathbf{t}^{(n)}$ un vector tracción que actúa en un plano de normal $\mathbf{n}$ sobre el punto material P en el interior de un cuerpo, se establecen los siguientes postulados:

- El *primer postulado de Cauchy* indica que el vector tracción $\mathbf{t}^{(n)}$ depende de la ubicación del punto material $\mathbf{X}^P$ y del vector unitario normal al plano donde actúa **n**, es decir $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)}\left(\mathbf{X}^P, \mathbf{n}\right)$.

- El *segundo postulado de Cauchy* establece que para un mismo punto material *P*, el vector tracción actuando en el plano de normal **n** es igual y de sentido contrario al vector tracción actuando en el plano de normal –**n**, por lo tanto $\mathbf{t}^{(n)}\left(\mathbf{X}^P, \mathbf{n}\right) = -\mathbf{t}^{(-n)}\left(\mathbf{X}^P, -\mathbf{n}\right)$.

2.4. Componentes de esfuerzo

Para un mismo punto *P* cada plano de normal **n** establece un vector $\mathbf{t}^{(n)}$. En particular, en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares con vectores base $\mathbf{e}_i$, existe un vector tracción asociado a cada uno de los vectores base. Como se ilustra en la **Figura 2.4(a)**, el vector $\mathbf{t}^{(1)}$ es el vector tracción aplicado en *P* y sobre una superficie de normal $\mathbf{e}_1$. De igual manera, los vectores $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$, mostrados en la **Figura 2.4(b)** y **Figura 2.4(c)**, corresponden a los vectores de tracciones asociados a las direcciones $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, respectivamente.

Los tres vectores tracción $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$ son expresados en términos de sus componentes en el sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ así:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(i)} &= t_j^{(i)}\mathbf{e}_j \\ &= t_1^{(i)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(i)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(i)}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se denomina *componente de esfuerzo* σ_{ij} a la componente en la dirección del eje x_j del vector tracción $\mathbf{t}^{(i)}$ asociado a un plano cuya normal es paralela a x_i, es decir $\sigma_{ij} = t_j^{(i)}$. Por ejemplo en la **Figura 2.4(a)**, $\sigma_{12} = t_2^{(1)}$ es a la componente en la dirección del eje x_2 del vector tracciones $\mathbf{t}^{(1)}$ (asociado a una superficie de normal $\mathbf{e}_1$).

En consecuencia el vector tracción asociado a cada plano coordenado se puede escribir en función de las componentes de esfuerzo de la forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}^{(i)} &= \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \\
\mathbf{t}^{(1)} &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{t}^{(2)} &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{t}^{(3)} &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Recordando que el producto punto entre dos vectores es igual a la magnitud de la proyección de un vector sobre el otro y multiplicando por $\mathbf{e}_j$ en ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{e}_j \tag{2.4}$$

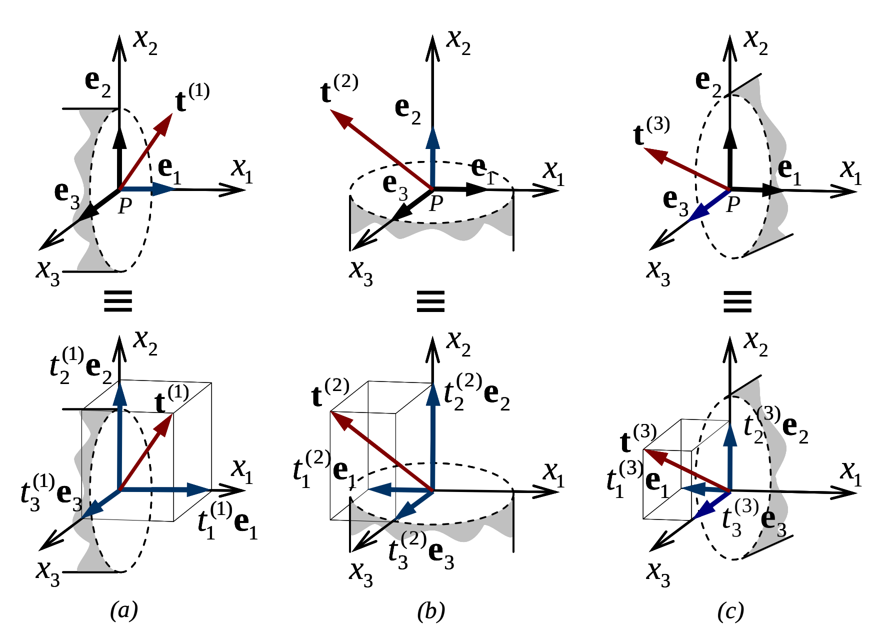


Figura 2.4. Componentes del vector tracción asociado a la superficie de normal (a) $\mathbf{e}_1$, (b) $\mathbf{e}_2$, y (c) $\mathbf{e}_3$.

2.5. Tracción sobre una superficie arbitraria

Suponiendo que las componentes de esfuerzo σ_{ij} son conocidas para todo *punto material*, se determina el *valor promedio* del vector tracción sobre una superficie arbitraria que contiene a *P*, estableciendo el equilibrio de

las fuerzas actuando sobre las caras de un tetraedro elemental como se ilustra en la **Figura 2.5**.

Las caras *PRT*, *PQT* y *PQR* del tetraedro son superficies normales a los ejes coordenados y a los vectores $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$ y $-\mathbf{e}_3$, respectivamente, en cambio la cara *QTR* es normal al vector unitario $\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i$. Sea δS el área de la cara *QTR* y n_1, n_2, n_3 las componentes del vector unitario normal a tal cara o los cosenos directores de **n**, el área de las caras *PRT*, *PQT* y *PQR* del tetraedro corresponden a

$$\delta S_1 = n_1\delta S \ , \ \delta S_2 = n_2\delta S \ \text{ y } \ \delta S_3 = n_3\delta S \tag{2.5}$$

respectivamente.

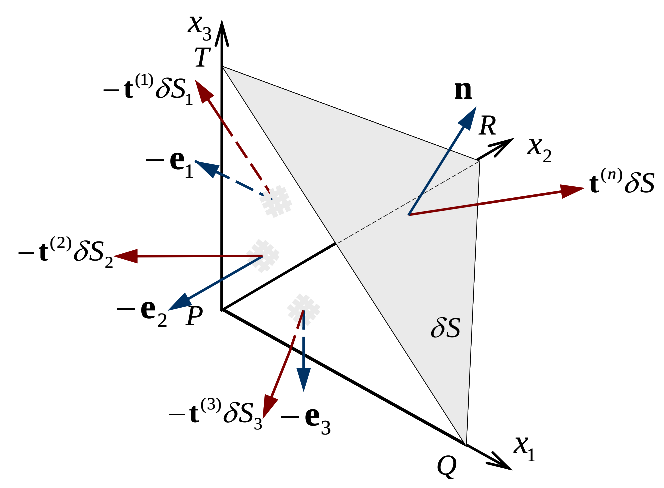


Figura 2.5. Fuerzas actuantes sobre un tetraedro elemental

Las fuerzas actuantes en las cuatro caras del tetraedro son las siguientes: sobre la cara *PRT* actúa $-\mathbf{t}^{(1)}\delta S_1$, sobre *PQT* actúa $-\mathbf{t}^{(2)}\delta S_2$, sobre *PQR* actúa $-\mathbf{t}^{(3)}\delta S_3$ y sobre la cara inclinada *QTR* actúa $\mathbf{t}^{(n)}\delta S$. Adicionalmente se ejercen fuerzas de cuerpo en el volumen del tetraedro δV iguales a $\rho\mathbf{b}\delta V$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton se establece el equilibrio de fuerzas del tetraedro elemental como la sumatoria de *valores promedio* de las fuerzas actuantes igualadas a la fuerza inercial $\rho\mathbf{a}\delta V$ así,

$$-\mathbf{t}^{(1)}\delta S_1 - \mathbf{t}^{(2)}\delta S_2 - \mathbf{t}^{(3)}\delta S_3 + \mathbf{t}^{(n)}\delta S + \rho\mathbf{b}\delta V = \rho\mathbf{a}\delta V \tag{2.6}$$

Sustituyendo las Expresiones (2.5) en la ecuación anterior y despejando el vector tracción sobre la superficie normal a $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$, se tiene que:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(1)}n_1 + \mathbf{t}^{(2)}n_2 + \mathbf{t}^{(3)}n_3 - \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a})\,\frac{\delta V}{\delta S} \qquad (2.7)$$

Si el tetraedro elemental se reduce de tamaño manteniendo su forma el factor $\delta V/\delta S \to 0$ y en consecuencia:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(1)}n_1 + \mathbf{t}^{(2)}n_2 + \mathbf{t}^{(3)}n_3 \qquad (2.8)$$

La expresión anterior se puede escribir en notación indicial de la forma:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(i)}n_i \qquad (2.9)$$

Por otro lado, siendo $\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j$ se tiene que:

$$\mathbf{t}^{(n)} = n_i\mathbf{t}^{(i)} = n_i\sigma_{ij}\mathbf{e}_j \qquad (2.10)$$

En conclusión las componentes del vector tracción $\mathbf{t}^{(n)} = t_j^{(n)}\mathbf{e}_j$ actuando sobre la superficie de normal **n**, son iguales a:

$$t_j^{(n)} = n_i\sigma_{ij} \qquad (2.11)$$

2.6. Trasformación de las componentes de esfuerzo

Las componentes de los vectores tracción están definidas por un sistema coordenado específico y por lo tanto las denominadas componentes de esfuerzo son diferentes de acuerdo con el sistema coordenado escogido.

Sea σ_{ij} las componentes de esfuerzo definidas como las componentes del vector tracción $\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j$ actuando sobre una superficie de normal $\mathbf{e}_i$ y establecidas con respecto al sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$. Considerando ahora una nueva base $\bar{\mathbf{e}}_i$, las componentes de esfuerzo $\bar{\sigma}_{ij}$ son las componentes del nuevo vector tracción $\bar{\mathbf{t}}^{(i)} = \bar{\sigma}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_j$ actuando sobre una superficie de normal $\bar{\mathbf{e}}_i$ y asociadas al sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$.

De acuerdo con las Ecuaciones (1.34) y (1.35), los vectores base de dos sistemas coordenados diferentes se relacionan de la forma $\bar{\mathbf{e}}_i = M_{ij}\mathbf{e}_j$

y $\mathbf{e}_j = M_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i$, siendo M_{ij} el coseno director entre los ejes coordenados x_i y $\bar{x}_j$.

En particular, $\bar{\mathbf{t}}^{(1)}$ es el vector tracción a una superficie cuya normal $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ es el vector base $\bar{\mathbf{e}}_1 = M_{11}\mathbf{e}_1 + M_{12}\mathbf{e}_2 + M_{13}\mathbf{e}_3$. Por lo tanto $\bar{\mathbf{t}}^{(1)}$ se puede expresar mediante la Ecuación (2.9) cuando $n_1 = M_{11}, n_2 = M_{12}, n_3 = M_{13}$ de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{t}}^{(1)} &= M_{1i}\mathbf{t}^{(i)} \\ &= M_{11}\mathbf{t}^{(1)} + M_{12}\mathbf{t}^{(2)} + M_{13}\mathbf{t}^{(3)}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Sustituyendo a $\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j$ en la ecuación anterior se tiene que:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(1)} = M_{1i}\sigma_{ij}\mathbf{e}_j = M_{1i}\sigma_{ij}M_{qj}\bar{\mathbf{e}}_q \tag{2.13}$$

De manera similar se definen los vectores tracción $\bar{\mathbf{t}}^{(2)}$ y $\bar{\mathbf{t}}^{(3)}$ asociados a superficies normales a los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_2$ y $\bar{\mathbf{e}}_3$ respectivamente, obteniendo la siguiente expresión general:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(p)} = M_{pi}\sigma_{ij}M_{qj}\bar{\mathbf{e}}_q \tag{2.14}$$

Recordando que el vector tracción sobre una superficie de normal $\bar{\mathbf{e}}_i$ y asociado al sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ corresponde a $\bar{\mathbf{t}}^{(p)} = \bar{\sigma}_{pq}\bar{\mathbf{e}}_q$, las componentes de esfuerzo en los dos sistemas coordenados se relacionarán así:

$$\bar{\sigma}_{pq} = M_{pi}\sigma_{ij}M_{qj} \tag{2.15}$$

La ecuación expresa precisamente la *ley de transformación de las componentes* de un tensor de segundo orden.

2.7. Tensor de esfuerzos

De acuerdo con el Apartado 1.6.2 y con la conclusión anterior, existe un tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}$ cuyas componentes son σ_{ij} en el sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ o de componentes $\bar{\sigma}_{ij}$ en el sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$, es decir,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \bar{\sigma}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \tag{2.16}$$

Tal tensor describe completamente el estado de esfuerzos de un *punto material* sobre un cuerpo y se denomina *tensor de esfuerzos de Cauchy* o simplemente *tensor de esfuerzos*. Hay otras medidas del esfuerzo adoptadas en problemas de *deformación finita* que no están en el alcance de este documento.

El tensor de esfuerzos de un punto material es una entidad física definida por el vector tracción $\mathbf{t}^{(n)}$ y por el vector unitario normal a la superficie sobre la cual actúa **n**.

De acuerdo con Ecuación (1.63) la matriz de componentes del tensor de esfuerzos referida a los vectores base $\mathbf{e}_i$ y a los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$, respectivamente son:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = (\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$
$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = (\bar{\sigma}_{ij}) = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Asimismo, como lo indica la Ecuación (2.15), la ley de transformación de sistema coordenado en notación matricial establece que:

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = [\mathbf{M}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{M}]^T \tag{2.18}$$

siendo $[\mathbf{M}] = (M_{ij})$ la matriz de transformación.

Ejemplo 2.1. Dadas las siguientes las componentes de esfuerzo de un punto *P* en un sistema de coordenadas $x_1x_2x_3$:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix} MPa$$

Determinar las componentes de esfuerzo $[\bar{\boldsymbol{\sigma}}]$ en un sistema coordenado $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, cuyos vectores base son:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \tfrac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$$
$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$
$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$$

Las componentes de la matriz de transformación definidas como $M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$, son iguales a:

$$[\mathbf{M}] = (M_{ij}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Las componentes del tensor de esfuerzos con respecto al sistema coordenado $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ se obtienen del triple producto matricial:

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = [\mathbf{M}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{M}]^T$$
$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

El resultado de la operación anterior es:

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 13 & -1 \\ 13 & -14 & -12 \\ -1 & -12 & 11 \end{bmatrix} MPa$$

Sea $\mathbf{t}^{(1)}$ el vector tracción actuando sobre la superficie de normal $\mathbf{e}_1$, el cual corresponde la suma vectorial de los vectores $\sigma_{11}\mathbf{e}_1, \sigma_{12}\mathbf{e}_2$ y $\sigma_{13}\mathbf{e}_3$, mostrados en la **Figura 2.6(a)**. Allí se observa que las cantidades vectoriales se representan mediante flechas que llevan la dirección positiva de los ejes coordenados. Sin embargo, en la representación gráfica es habitual omitir los vectores base $\mathbf{e}_i$ para indicar a los vectores $\sigma_{ij}\mathbf{e}_j$ como se muestra en la **Figura 2.6(b)**.

El tensor de esfuerzos se representa gráficamente mediante las componentes de los vectores tracción asociados a las caras de un cubo, cuyas normales o *planos coordenados* llevan la dirección positiva de los ejes del sistema coordenado x_i, como lo ilustra la **Figura 2.6(b)**.

***Observación**. La componente σ_{ij} es la magnitud del esfuerzo actuante en el plano coordenado normal a x_i en dirección $\mathbf{e}_j$. Una componente de esfuerzo es positiva si dirección coincide con la dirección positiva de uno de los ejes coordenados y actúa en un plano cuya normal también apunta hacia la dirección positiva de uno de los ejes coordenados. Todas las componentes de esfuerzo mostradas en la **Figura 2.6(b)** son positivas. Las dimensiones asociadas a las componentes de esfuerzo son las mismas de la tracción y corresponden a unidades de fuerza divididas entre unidades de longitud al cuadrado.*

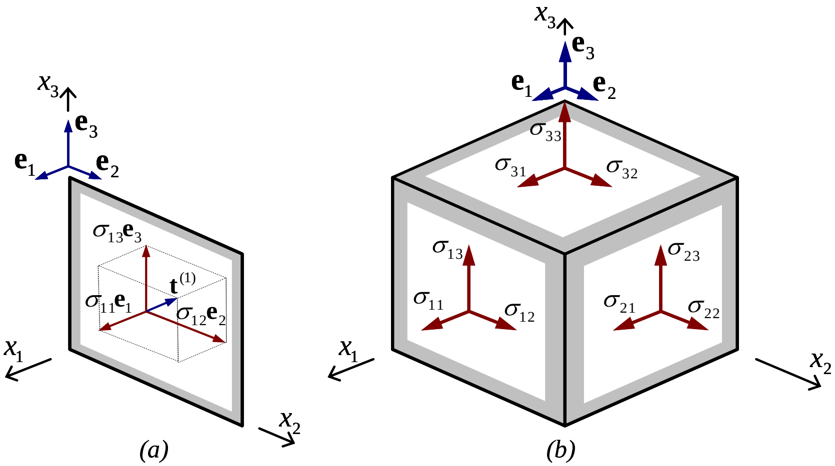


Figura 2.6. Componentes de esfuerzo: (a) componentes del vector tracción actuando sobre la superficie $\mathbf{e}_1$, (b) representación de las componentes de esfuerzo sobre las caras positivas de un cubo infinitesimal (se omite el vector base que define la dirección).

Las componentes de esfuerzo que actúan en dirección normal a los planos coordenados respectivos, es decir, las componentes de $\mathbf{t}^{(i)}$ en la misma dirección normal a la superficie $\mathbf{e}_j$, se denominan *esfuerzos normales*. Las componentes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, es decir los $\sigma_{ij}\ \forall i = j$, corresponden a los esfuerzos normales del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ como se indica en la **Figura 2.6(b)**.

Las componentes de esfuerzo contenidas en los planos coordenados y paralelas a los ejes coordenados se denominan *esfuerzos cortantes*. Las componentes $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$, es decir los $\sigma_{ij}\ \forall i \neq j$, corresponden a los esfuerzos cortantes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ como se indica en la **Figura 2.6(b)**.

Las componentes del tensor de esfuerzos definidas con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ indicadas en la matriz $[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = (\bar{\sigma}_{ij})$ de la Ecuación (2.17), se representan gráficamente en la **Figura 2.7**.

Retomando la deducción del vector tracción actuando sobre una superficie arbitraria de normal **n** indicada en la Ecuación (2.10) y a partir de la definición del tensor de esfuerzos, se obtiene en notación indicial y compacta que:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(n)} &= \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = n_i\sigma_{ij}\mathbf{e}_j \\ t_j^{(n)} &= n_i\sigma_{ij} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Si las componentes de los vectores $\mathbf{t}^{(n)}$ y **n** se representan mediante matrices columna, la ecuación anterior en notación matricial se expresará como:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{t}^{(n)}\right] &= [\boldsymbol{\sigma}]^T[\mathbf{n}] \\ \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

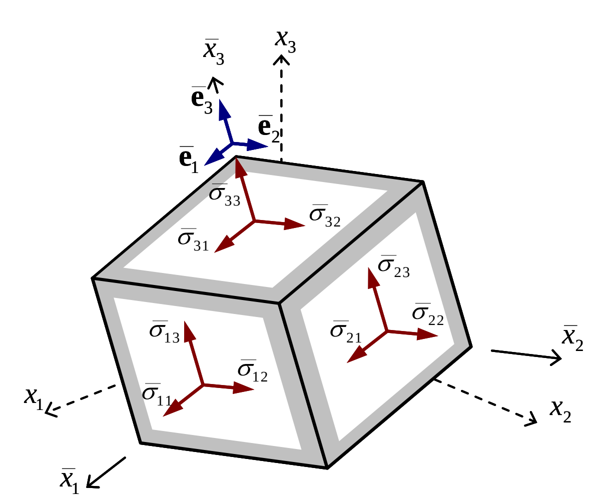


Figura 2.7. Representación de las componentes de esfuerzo sobre las caras positivas de un cubo infinitesimal en un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$.

Ejemplo 2.2. Dado un estado de esfuerzos cuyas componentes en un sistema de coordenadas $x_1x_2x_3$ son:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 5 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} MPa$$

Determinar el vector tracción actuante sobre un plano definido por la función $\phi = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1 = 0$, como lo indica la **Figura 2.3**.

El gradiente de la función de un plano es un vector normal a él. En particular, el gradiente de $\phi = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1$ se obtiene de la forma:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$$

La norma del vector anterior es igual a $\|\nabla\phi\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$ y en consecuencia el vector normal unitario al plano se calcula como:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = \tfrac{1}{7}(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3)$$

El vector tracción actuante en un plano de normal unitaria **n** es igual $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ en notación tensorial o $\left[\mathbf{t}^{(n)}\right] = [\boldsymbol{\sigma}]^T[\mathbf{n}]$ en notación matricial. Sustituyendo las componentes del tensor de esfuerzos y del vector **n** dados en la misma base $\mathbf{e}_i$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 5 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \frac{1}{7} = \begin{bmatrix} 17 \\ 82 \\ 24 \end{bmatrix} \frac{1}{7}\, MPa$$

En conclusión el tensor de tracción es igual a $\mathbf{t}^{(n)} = \tfrac{1}{7}(17\mathbf{e}_1 + 82\mathbf{e}_2 + 24\mathbf{e}_3)\ MPa$.

2.8. Ecuaciones de equilibrio y simetría del tensor de esfuerzos

En esta sección se presenta el equilibrio dado por la fuerza y el momento resultante tanto en el medio continuo como en un punto material.

2.8.1. Ecuaciones de equilibrio

Se considera un cuerpo en equilibrio si la fuerza y el momento resultante alrededor de un punto específico son iguales a cero. Asimismo, una parte cualquiera del cuerpo de volumen $V' \subset V$ y de superficie de contorno $\partial V' \subset \partial V$ también estará en equilibrio, si todo el sólido cumple con tal condición.

Las fuerzas que actúan sobre una parte del cuerpo corresponden a la suma de las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$ sobre una región $\partial V'$ y las fuerzas de cuerpo $\rho\mathbf{b}$ sobre el volumen V' como lo indica la **Figura 2.8**.

La primera condición de equilibrio estático indica que la fuerza resultante es igual a cero y se puede expresar mediante la siguiente ecuación vectorial.

$$\int_{\partial V'} \mathbf{t}^* dS + \int_{V'} \rho\mathbf{b} dV = \mathbf{0} \tag{2.21}$$

De acuerdo con el principio de acción y reacción, la acción externa dada por una fuerza de superficie actuando sobre un punto del contorno es igual y de sentido contrario a una acción interna definida por un vector tracción, es decir $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}^{(\partial V')})$ $\forall \mathbf{x} \in \partial V'$, siendo $\mathbf{n}^{(\partial V')}$ el vector normal unitario a la superficie de contorno $\partial V'$ en el punto material de coordenada $\mathbf{x}$. Recordando que el vector tracción es igual a $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, la *ecuación de equilibrio en cada punto material del contorno* del sólido se define como:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V' \tag{2.22}$$

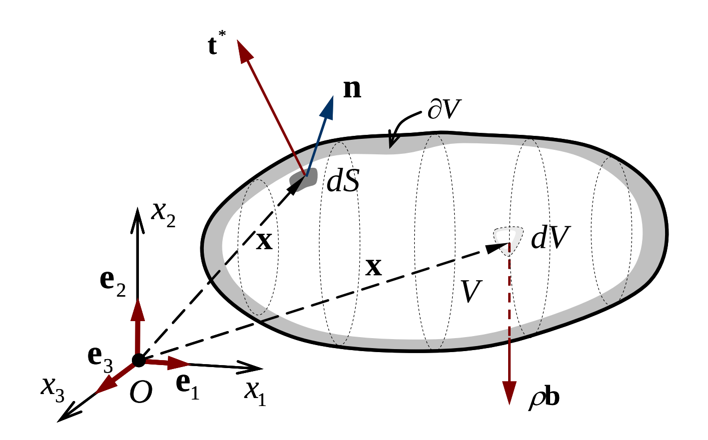


Figura 2.8. Fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo un sólido

Dado un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_j$ el equilibrio de fuerzas se expresa en notación indicial como:

$$\int_{\partial V'} n_i \sigma_{ij} dS + \int_{V'} \rho b_j dV = 0 \tag{2.23}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al tensor de esfuerzos $\sigma_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, se transforma la integral en la superficie $\partial V'$ del primer término de la ecuación anterior por una integral en el volumen *V'*, así:

$$\int_{\partial V'} n_i \sigma_{ij} dS = \int_{V'} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV \tag{2.24}$$

suponiendo que las primeras derivadas del tensor de esfuerzos son continuas. Por lo tanto la Ecuación (2.23) es igual a:

$$\int_{V'} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j \right) dV = 0 \tag{2.25}$$

Si el volumen arbitrario *V'* corresponde al volumen del sólido *V*, la expresión anterior se denomina *ecuación global de equilibrio dada por la fuerza resultante* y se escribe en notación indicial de la forma:

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j \right) dV = 0 \tag{2.26}$$

y en notación compacta es igual a:

$$\int_{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV = 0 \tag{2.27}$$

Ahora suponiendo que el volumen arbitrario *V'* de la Ecuación (2.25) es igual al diferencial de volumen *dV*, se puede definir la *ecuación de equilibrio local dada por la fuerza resultante* en notación indicial de la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad \forall X_i \in V \tag{2.28}$$

y en notación compacta como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in V \tag{2.29}$$

La expresión anterior también recibe el nombre de *ecuación de equilibrio interno* o *ecuación de Cauchy* y representan las siguientes tres ecuaciones de equilibrio.

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho b_1=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho b_2=0 \quad (2.30)$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=0$$

La segunda condición establece que el momento resultante alrededor de un punto *O* es igual a cero. Siendo **x** el vector posición de cada fuerza aplicada con respecto a *O*, como lo indica la **Figura 2.8**, se tiene una ecuación de equilibrio de la forma,

$$\int_{\partial V'}\mathbf{x}\times\mathbf{t}^{*}dS+\int_{V'}\mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}dV=\mathbf{0} \quad (2.31)$$

Se recuerda que el momento generado por una fuerza alrededor de un punto es igual al producto vectorial o cruz entre el vector que define la posición de la fuerza con respecto a tal punto y el propio vector fuerza. En general, el producto vectorial entre los vectores **x** y $\mathbf{t}^{*}$ se escribe de la forma $\mathbf{x}\times\mathbf{t}^{*}=\tilde{p}_{jpq}\mathbf{e}_j x_p t_q^{*}$ donde $\tilde{p}_{jpq}$ corresponde al operador permutación entre los índices *i*, *p* y *q*.

Considerando que el punto *O* está ubicado en el origen del sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_j$ y que $\mathbf{t}^{*}=\mathbf{t}^{(n)}=n_i\sigma_{ij}\mathbf{e}_j$, la ecuación de equilibrio dada por el momento resultante se expresa en notación indicial como:

$$\int_{\partial V'}\tilde{p}_{jpq}x_p n_r\sigma_{rq}dS+\int_{V'}\rho\,\tilde{p}_{jpq}x_p b_q dV=0 \quad (2.32)$$

Aplicando de nuevo el teorema de la divergencia al tensor de tercer orden $x_p\sigma_{rq}\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_q$, la integral de superficie del primer término de ecuación anterior se transforma en una integral de volumen de la forma:

$$\int_{\partial V'}\tilde{p}_{jpq}x_p n_r\sigma_{rq}dS=\int_{V'}\tilde{p}_{jpq}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p\sigma_{rq}\right)dV \quad (2.33)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (2.32) se tiene una ecuación de equilibrio sobre un volumen arbitrario *V’* de la forma:

$$\int_{V'}\tilde{p}_{jpq}\left\{\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p\sigma_{rq}\right)+\rho x_p b_q\right\}dV=0 \quad (2.34)$$

Si el volumen arbitrario *V'* corresponde al volumen del sólido *V*, la expresión anterior se denomina *ecuación global de equilibrio dada por el momento resultante* y se escribe en notación indicial de la forma:

$$\int_V \tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) + \rho x_p b_q \right\} dV = 0 \qquad (2.35)$$

Por otro lado, la *ecuación local de equilibrio dada por el momento resultante* corresponde a la Ecuación (2.34) integrada en un volumen diferencial *dV*, lo cual en notación indicial es igual a:

$$\tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) + \rho x_p b_q \right\} = 0 \quad \forall X_i \in V \qquad (2.36)$$

***Observación**. El equilibrio de un sólido obliga a que se cumplan las condiciones de equilibrio de cada una de las partículas que conforman el mismo. Por esta razón, las ecuaciones de equilibrio planteadas anteriormente se escriben tanto de forma global a partir de la integración en el volumen del sólido, como de forma local con respecto a cada posición* **x** *en el interior y en el contorno del mismo.*

2.8.2. Simetría del tensor de esfuerzos

A partir de las ecuaciones locales de equilibrio indicadas en las expresiones (2.28) y (2.36), se puede demostrar la simetría del tensor de esfuerzos mediante el desarrollo descrito a continuación.

Evaluando la derivada del producto $x_p \sigma_{rq}$ en el primer término de la Ecuación (2.36) se tiene:

$$\tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial x_p}{\partial x_r} \sigma_{rq} + x_p \frac{\partial \sigma_{rq}}{\partial x_r} + \rho x_p b_q \right\} = 0 \qquad (2.37)$$

Factorizando x_p del segundo y tercer término y recordando que $\partial x_p / \partial x_r = \delta_{pr}$ y que $\delta_{pr} \sigma_{rq} = \sigma_{pq}$, se obtiene que:

$$\tilde{p}_{jpq} \left\{ \sigma_{pq} + x_p \left(\frac{\partial \sigma_{rq}}{\partial x_r} + \rho b_q \right) \right\} = 0 \qquad (2.38)$$

El término entre paréntesis de la ecuación anterior corresponde a la parte izquierda de la ecuación local de equilibrio dada por la fuerza

resultante. Como se indica en la Expresión (2.28) dicha ecuación es igual a cero y en consecuencia:

$$\tilde{p}_{jpq}\sigma_{pq} = 0 \tag{2.39}$$

La condición anterior implica que

$$\sigma_{pq} = \sigma_{qp} \tag{2.40}$$

y por lo tanto el *tensor de esfuerzos* de un punto en equilibrio es un *tensor simétrico*. De acuerdo a lo anterior la matriz de componentes de esfuerzo en un sistema coordenado específico es igual a su transpuesta y se puede escribir de la forma:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Considerando un sólido en equilibrio dinámico también se llega a la misma conclusión.

En general el producto simplemente contraído entre un vector y un tensor de segundo orden simétrico cumple con la propiedad conmutativa, por lo tanto las ecuaciones de equilibrio interno y de equilibrio del contorno donde interviene el tensor de esfuerzos se pueden presentar en notación indicial como:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad \forall x_i \in V \\ &n_i \sigma_{ij} = \sigma_{ji} n_i = t_j^* \quad \forall \partial x_i \in V \end{aligned} \tag{2.42}$$

y en notación compacta como:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ &\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \quad \forall \partial \mathbf{x} \in V \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.9. Componentes principales de esfuerzo y direcciones principales

Como se ilustra en la **Figura 2.9(a)**, un vector tracción que actúa en un punto *P* y sobre un plano de normal **n**, en general, no es paralelo al vector **n**. Sin embargo, existe un plano especial de normal $\mathbf{n}^{(p)}$ indicado en la **Figura 2.9(b)**, para el cual un vector tracción actúa en la misma dirección de $\mathbf{n}^{(p)}$. Por lo tanto el vector tracción $\mathbf{t}^{(p)}$ se puede expresar como un escalar $\sigma_{(p)}$ multiplicado por tal vector normal unitario, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(p)} &= \sigma_{(p)}\mathbf{n}^{(p)} \\ t_j^{(p)} &= \sigma_{(p)} n_j^{(p)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

La dirección definida por $\mathbf{n}^{(p)}$ que cumple la ecuación anterior se denominan *dirección principal de esfuerzo* y el escalar $\sigma_{(p)}$ corresponde al *valor principal de esfuerzo*. Asimismo, todo plano cuya normal es $\mathbf{n}^{(p)}$ se denomina *plano principal de esfuerzos*. En la **Figura 2.9(b)** se observa que la componente de esfuerzo tangencial o cortante sobre este plano es nula, si el vector tracción es normal a la superficie en la cual actúa.

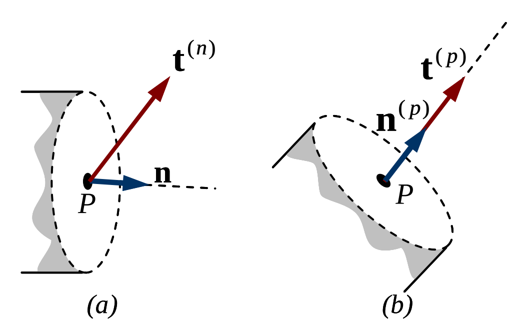


Figura 2.9. Vector tracción en *P* : (a) asociado a una superficie arbitraria de normal **n**, (b) asociado a una superficie especial cuya normal $\mathbf{n}^{(p)}$ es paralela al mismo vector tracción

Aplicado la Ecuación (2.19) cuando el vector tracción lleva la misma dirección del plano en el cual actúa, y en virtud de la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(p)} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}^{(p)} \\ t_j^{(p)} &= \sigma_{ji} n_i^{(p)} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Si ahora se restan las Ecuaciones (2.44) y (2.45) se obtiene la siguiente ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(p)} - \sigma_{(p)} \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0} \rightarrow \left(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} \sigma_{(p)} \right) \cdot \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0} \\ \sigma_{ji} n_i^{(p)} - \sigma_{(p)} n_i^{(p)} = 0 \rightarrow \left(\sigma_{ji} - \delta_{ji} \sigma_{(p)} \right) n_i^{(p)} = 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

que representa tres ecuaciones escalares de la forma:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{11} - \sigma_{(p)} \right) n_1^{(p)} + \sigma_{12}\, n_2^{(p)} + \sigma_{13}\, n_3^{(p)} &= 0 \\ \sigma_{21} n_1^{(p)} + \left(\sigma_{22} - \sigma_{(p)} \right) n_2^{(p)} + \sigma_{23}\, n_3^{(p)} &= 0 \\ \sigma_{31} n_1^{(p)} + \sigma_{32}\, n_2^{(p)} + \left(\sigma_{33} - \sigma_{(p)} \right) n_3^{(p)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

En notación matricial y recordando la simetría del tensor de esfuerzos las ecuaciones anteriores se reescriben como:

$$\begin{bmatrix} \left(\sigma_{11} - \sigma_{(p)} \right) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \left(\sigma_{22} - \sigma_{(p)} \right) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \left(\sigma_{33} - \sigma_{(p)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(p)} \\ n_2^{(p)} \\ n_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

siendo conocidas las componentes de esfuerzo. Para calcular las incógnitas $n_i^{(p)}$ y $\sigma_{(p)}$, además de las ecuaciones (2.47), se recurre a la condición de normalización de los vectores principales expresada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(p)} \cdot \mathbf{n}^{(p)} &= 1 \\ n_i^{(p)} n_i^{(p)} &= 1 \\ \left(n_1^{(p)} \right)^2 + \left(n_2^{(p)} \right)^2 + \left(n_3^{(p)} \right)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Para obtener la solución no trivial de la Ecuación (2.48), el determinante de la matriz de tercer orden presentada a la izquierda debe ser igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned} \det\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji} \sigma_{(p)} \right) = 0 \\ \det \begin{bmatrix} \left(\sigma_{11} - \sigma_{(p)} \right) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \left(\sigma_{22} - \sigma_{(p)} \right) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \left(\sigma_{33} - \sigma_{(p)} \right) \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Tal determinante da como resultado una ecuación cúbica para $\sigma_{(p)}$ denominada *ecuación característica del tensor de esfuerzos* de la forma:

$$\sigma_{(p)}^3 - I_1 \sigma_{(p)}^2 + I_2 \sigma_{(p)} - I_3 = 0 \tag{2.51}$$

cuyas raíces $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$ denominadas *valores principales del tensor de esfuerzos* son reales y se ordenan de tal manera que $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > \sigma_{(3)}$. El *esfuerzo principal mayor* es $\sigma_{(1)}$, el *esfuerzo principal intermedio* es $\sigma_{(2)}$ y el *esfuerzo principal menor* corresponde a $\sigma_{(3)}$. Los coeficientes de la ecuación cúbica I_1, I_2, I_3 se conocen como el *primer, segundo y tercer invariante del tensor de esfuerzos* y se expresan en notación compacta de la misma forma como se indicó en la Ecuación (1.93) para un tensor simétrico de segundo orden, así:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^2\right\} \\ I_3 &= \det\boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{2.52}$$

y en notación indicial como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{kk} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(\sigma_{kk})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right\} \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Cada valor principal de esfuerzos $\sigma_{(p)}$ está asociado a una dirección principal definida por un vector propio normalizado $\mathbf{n}^{(p)} = n_1^{(p)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(p)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(p)}\mathbf{e}_3$, que cumple con las ecuaciones (2.46), (2.47) y (2.49).

Para calcular las componentes del vector orientado en la dirección principal p se sustituye el valor del esfuerzo principal $\sigma_{(p)}$ en las ecuaciones anteriores. Dado que tal sistema de ecuaciones es homogéneo, la solución no trivial será un *resultado modal*, es decir que las componentes obtenidas multiplicadas por cualquier real diferente de cero, siguen siendo solución del sistema.

El cálculo de los valores y las direcciones principales de esfuerzos siguen el mismo procedimiento para evaluar los valores y vectores principales de un tensor simétrico de segundo orden presentados en los Apartados 1.6.9 y 1.6.11. La simetría del tensor de esfuerzos permite confirmar que existen tres valores principales reales asociados a tres direcciones principales.

Si los valores principales son distintos las direcciones principales son mutuamente ortogonales. En cambio, si dos o tres valores principales son iguales, las expresiones anteriores se siguen cumpliendo pero los ejes principales dados por los vectores $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ no estarán definidos de forma única.

Si dos valores principales son iguales, por ejemplo si $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} \neq \sigma_{(3)}$, el vector propio $\mathbf{n}^{(3)}$ está definido, mientras que los

vectores $\mathbf{n}^{(1)}$ y $\mathbf{n}^{(2)}$ corresponden a cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{n}^{(3)}$. Por otro lado, si los tres valores principales son iguales, es decir si $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$, todo vector unitario es un vector propio del tensor $\boldsymbol{\sigma}$.

Con el fin de conformar un sistema coordenado cartesiano derecho con los ejes principales, se establece que los vectores propios $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ sean vectores unitarios mutuamente ortogonales.

El *sistema coordenado principal de esfuerzos* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ indicado en la **Figura 2.10**, se define como a aquel sistema coordenado conformado por los ejes principales del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$. Asimismo, se denominan *vectores base principal* $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ a los tres vectores unitarios paralelos a cada uno de los ejes principales. Por lo tanto el tensor de esfuerzos escrito en términos de sus componentes en un sistema coordenado principal corresponde a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \qquad \hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{(i)} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.54}$$

La matriz $[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]$ de componentes del tensor de esfuerzos expresados en el sistema coordenado dado por la base $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ corresponde a una matriz diagonal cuyos coeficientes son los valores de esfuerzos principales, es decir,

$$[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

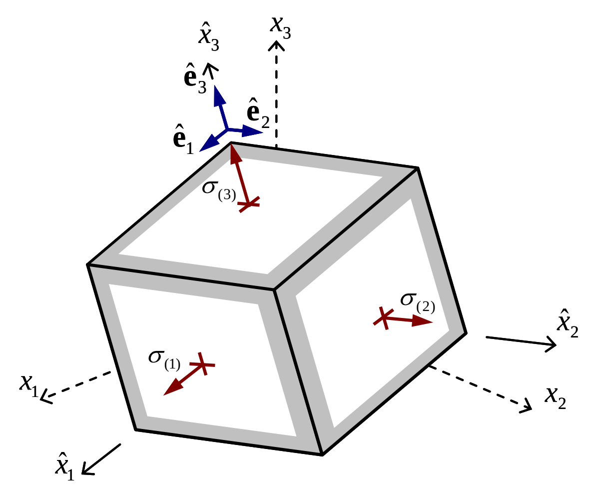


Figura 2.10. Valores principales de esfuerzos y direcciones principales en un punto *P*.

***Observación**. Los vectores base principal son vectores unitarios mutuamente ortogonales en dirección de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas de mano derecha.*

***Observación**. Cuando los valores principales son diferentes entre sí, los vectores base principal $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ coinciden con los vectores $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ respectivamente.*

Ejemplo 2.3. Dado un tensor simétrico de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}$ que representa el estado de esfuerzos de un punto P en un sistema de coordenadas $x_1x_2x_3$, cuyas componentes indicadas en notación matricial son:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -6 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} MPa$$

Determinar los valores principales de esfuerzos y las respectivas direcciones principales en dicho punto material.

Los esfuerzos principales $\sigma_{(p)}$ y las direcciones principales $\mathbf{n}^{(p)}$ se obtienen de la solución no trivial de una ecuación homogénea de la forma $\left(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}\sigma_{(p)}\right) \cdot \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0}$, la cual se puede expresar en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} 3-\sigma_{(p)} & 2 & -3 \\ 2 & 6-\sigma_{(p)} & -6 \\ -3 & -6 & 3-\sigma_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(p)} \\ n_2^{(p)} \\ n_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expresión anterior es válida si el determinante de la matriz cuadrada a la izquierda es igual a cero, de donde se obtiene una ecuación cúbica de la forma:

$$\sigma_{(p)}^3 - I_1\sigma_{(p)}^2 + I_2\sigma_{(p)} - I_3 = 0$$

siendo I_1, I_2, I_3 los invariantes del tensor de esfuerzo que en particular son iguales a:

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = 12$$
$$I_2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{12^2 - 152\right\} = -4$$
$$I_3 = \det\boldsymbol{\sigma} = -48$$

Las tres raíces reales de la ecuación cúbica anterior corresponden a los esfuerzos principales cuyos valores son los siguientes:

$$\sigma_{(1)} = 12\ MPa \quad , \quad \sigma_{(2)} = 2\ MPa \quad , \quad \sigma_{(3)} = -2\ MPa$$

La dirección $\mathbf{n}^{(1)} = n_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(1)}\mathbf{e}_3$ del esfuerzo principal $\sigma_{(1)} = 12\ MPa$, se obtiene de la solución de un sistema de 3 ecuaciones simultáneas elegidas de la siguiente manera. Las dos primeras expresiones corresponden a dos ecuaciones escalares linealmente independientes de la ecuación homogénea tensorial $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$, en este caso para $j = 1$ y $j = 2$. Se utiliza como tercera ecuación la norma del vector unitario de componentes $n_i^{(p)}$, evitando la solución trivial del sistema. Por lo tanto el sistema de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{aligned} (3-12)n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} - 3n_3^{(1)} &= 0 \\ 2n_1^{(1)} + (6-12)n_2^{(1)} - 6n_3^{(1)} &= 0 \\ \left(n_1^{(1)}\right)^2 + \left(n_2^{(1)}\right)^2 + \left(n_3^{(1)}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

De la solución del sistema de ecuaciones anterior se obtienen las siguientes componentes del vector direccional $\mathbf{n}^{(1)}$ asociado al esfuerzo principal $\sigma_{(1)}$:

$$n_1^{(1)} = \frac{3}{\sqrt{70}} \quad , \quad n_2^{(1)} = \frac{6}{\sqrt{70}} \quad , \quad n_3^{(1)} = -\frac{5}{\sqrt{70}}$$

La dirección $\mathbf{n}^{(2)} = n_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(2)}\mathbf{e}_3$ del esfuerzo principal $\sigma_{(2)} = 2\ MPa$, se obtiene de la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas conformado por las ecuaciones escalares linealmente independientes de la ecuación homogénea tensorial $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$ para $j = 1$ y $j = 3$, y por la norma del vector unitario de componentes $n_i^{(p)}$, así:

$$\begin{aligned} (3-2)n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - 3n_3^{(2)} &= 0 \\ -3n_1^{(2)} - 6n_2^{(2)} + (3-2)n_3^{(2)} &= 0 \\ \left(n_1^{(2)}\right)^2 + \left(n_2^{(2)}\right)^2 + \left(n_3^{(2)}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtienen las siguientes componentes del vector direccional $\mathbf{n}^{(2)}$ asociado al esfuerzo principal $\sigma_{(2)}$:

$$n_1^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad n_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad n_3^{(2)} = 0$$

Finalmente, la dirección $\mathbf{n}^{(3)} = n_1^{(3)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(3)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(3)}\mathbf{e}_3$ del esfuerzo principal $\sigma_{(3)} = -2\ MPa$, se obtiene de la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas conformado por las ecuaciones escalares linealmente independientes de la ecuación homogénea tensorial $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$ para $j = 2$ y $j = 3$, y por la norma del vector unitario de componentes $n_i^{(p)}$, así:

$$\begin{aligned} 2n_1^{(3)} + (6+2)\,n_2^{(3)} - 6\,n_3^{(3)} &= 0 \\ -3n_1^{(3)} - 6\,n_2^{(3)} + (3+2)\,n_3^{(3)} &= 0 \\ \left(n_1^{(2)}\right)^2 + \left(n_2^{(2)}\right)^2 + \left(n_3^{(2)}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtienen las siguientes componentes del vector direccional $\mathbf{n}^{(3)}$ asociado al esfuerzo principal $\sigma_{(3)}$:

$$n_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad , \quad n_2^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{14}} \quad , \quad n_3^{(3)} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Ejemplo 2.4. Dadas las siguientes las componentes de esfuerzo de un punto P en un sistema de coordenadas $x_1x_2x_3$:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & 4 & -2 \\ 4 & 11 & 2 \\ -2 & 2 & 14 \end{bmatrix} MPa$$

Determinar los valores principales de esfuerzos y las respectivas direcciones principales en dicho punto material.

Los invariantes del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ son iguales a:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = 12 \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{12^2 - 54\right\} = 45 \\ I_3 &= \det\boldsymbol{\sigma} = 50 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación característica del problema de valores propios de la forma $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$ es:

$$\sigma_{(p)}^3 - 12\sigma_{(p)}^2 + 45\sigma_{(p)} - 50 = 0$$

Los esfuerzos principales corresponden a las tres raíces reales de la ecuación cúbica anterior cuyos valores son:

$$\sigma_{(1)} = 5\,MPa \quad , \quad \sigma_{(2)} = 5\,MPa \quad , \quad \sigma_{(3)} = 2\,MPa$$

Las direcciones principales se obtienen de la solución de un sistema de tres ecuaciones simultáneas conformado por dos ecuaciones escalares linealmente independientes escogidas de las siguientes ecuaciones:

$$\left(\tfrac{11}{3} - \sigma_{(p)}\right)n_1^{(p)} + \tfrac{4}{3}n_2^{(p)} - \tfrac{2}{3}n_3^{(p)} = 0$$
$$\tfrac{4}{3}n_1^{(p)} + \left(\tfrac{11}{3} - \sigma_{(p)}\right)n_2^{(p)} + \tfrac{2}{3}n_3^{(p)} = 0$$
$$-\tfrac{2}{3}n_1^{(p)} + \tfrac{2}{3}n_2^{(p)} + \left(\tfrac{14}{3} - \sigma_{(p)}\right)n_3^{(p)} = 0$$

La última ecuación del sistema está dada por la norma del vector unitario de componentes $n_i^{(p)}$, de la forma:

$$\left(n_1^{(p)}\right)^2 + \left(n_2^{(p)}\right)^2 + \left(n_3^{(p)}\right)^2 = 1$$

La dirección $\mathbf{n}^{(3)} = n_1^{(3)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(3)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(3)}\mathbf{e}_3$ del esfuerzo principal $\sigma_{(3)} = 2\,MPa$, se obtiene de la solución del sistema de ecuaciones simultáneas conformado por las ecuaciones escalares linealmente independientes de la ecuación homogénea tensorial $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$ para j igual a 2 y 3, y por la norma del vector unitario de componentes $n_i^{(p)}$, así:

$$4n_1^{(3)} + (11 - 6)n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0$$
$$-2n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} + (14 - 6)n_3^{(3)} = 0$$
$$\left(n_1^{(3)}\right)^2 + \left(n_2^{(3)}\right)^2 + \left(n_3^{(3)}\right)^2 = 1$$

Después de resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtienen las siguientes componentes del vector direccional $\mathbf{n}^{(3)}$ asociado al esfuerzo principal $\sigma_{(3)}$:

$$n_1^{(3)} = \frac{2}{3} \quad , \quad n_2^{(3)} = -\frac{2}{3} \quad , \quad n_3^{(3)} = \frac{1}{3}$$

Al calcular la dirección $\mathbf{n}^{(1)} = n_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + n_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + n_3^{(1)}\mathbf{e}_3$ del esfuerzo principal $\sigma_{(1)} = 5\,MPa$ se observa que las tres

ecuaciones escalares que se derivan de la expresión tensorial $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)}\right)n_i^{(p)} = 0$ indicadas a continuación, son linealmente dependientes; por lo tanto no hay una solución única para $\mathbf{n}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} \left(11-15\right)n_1^{(1)} + 4n_2^{(1)} - 2n_3^{(1)} &= 0 \\ 4n_1^{(1)} + \left(11-15\right)n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0 \\ -2n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + \left(14-15\right)n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Asimismo, para $\sigma_{(2)} = \sigma_{(1)} = 5\,MPa$ se establece que la dirección principal $\mathbf{n}^{(2)}$ no tiene una solución única.
En conclusión se puede definir un sistema coordenado principal con dos vectores direccionales principales cualquiera $\mathbf{n}^{(1)}$ y $\mathbf{n}^{(2)}$, que sean ortogonales entre sí y ortogonales al vector $\mathbf{n}^{(3)} = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

2.10. Máximos y mínimos de las componentes de esfuerzo

El vector tracción $\mathbf{t}^{(n)}$ que actúa en un punto P y sobre un plano de normal **n**, puede descomponerse en la suma dos vectores: uno normal y otro tangencial al plano de acción de $\mathbf{t}^{(n)}$ como se indica en la **Figura 2.11**. El vector normal al plano $\sigma_N\mathbf{n}$ está definido por el vector unitario **n** y por el escalar σ_N denominado *componente de esfuerzo normal*. En cambio, la magnitud σ_S del vector tangencial al plano $\sigma_S\mathbf{s}$ se denomina *componente de esfuerzo cortante* y su dirección está dada por un vector unitario **s**, el cual está contenido en el plano de normal **n**. Por lo tanto el vector tracción se puede indicar como:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \sigma_N\mathbf{n} + \sigma_S\mathbf{s} \tag{2.56}$$

La norma al cuadrado del vector tracción en términos de sus componentes en las direcciones **n** y **s** será igual a:

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{t}^{(n)}\right\|^2 = \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{t}^{(n)} &= \sigma_N^2 + \sigma_S^2 \\ t_i^{(n)}t_i^{(n)} &= \sigma_N^2 + \sigma_S^2 \end{aligned} \tag{2.57}$$

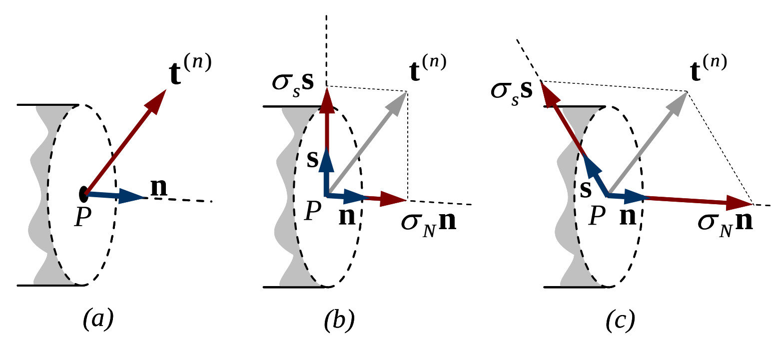


Figura 2.11. Vector tracción en P asociado a una superficie arbitraria de normal **n**: (a) esquema general, (b) y (c) dos posibles descomposiciones del vector tracción en un vector normal y otro vector tangencial al plano de normal **n**.

Despejando el cuadrado de la *componente de esfuerzo cortante* de la ecuación anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \left\|\mathbf{t}^{(n)}\right\|^2 - \sigma_N^2 \\ \sigma_S^2 &= t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \sigma_N^2 \end{aligned} \tag{2.58}$$

La *componente de esfuerzo normal* se puede calcular como la proyección del vector tracción en la dirección del vector unitario **n**, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_N &= t_j^{(n)} n_j \end{aligned} \tag{2.59}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior al vector tracción definido en la Ecuación (2.19) como $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_N &= n_i \sigma_{ij} n_j \end{aligned} \tag{2.60}$$

Para un sistema coordenado establecido por los vectores base principal $\hat{\mathbf{e}}_i$ mostrado en la **Figura 2.12**, un vector unitario direccional **n** es igual a:

$$\mathbf{n} = \hat{n}_i \hat{\mathbf{e}}_i \tag{2.61}$$

y el tensor de esfuerzos se escribe de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$ como se indica en la Ecuación (2.54). En consecuencia, el vector tracción $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ actuando sobre un plano de normal **n** escrito en la base $\hat{\mathbf{e}}_i$ corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(n)} &= \hat{n}_i \hat{\sigma}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= \hat{n}_1 \sigma_{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{n}_2 \sigma_{(2)} \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{n}_3 \sigma_{(3)} \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned} \tag{2.62}$$

De acuerdo con la expresión anterior la norma del vector tracción elevada al cuadrado será igual a:

$$\left\| \mathbf{t}^{(n)} \right\|^2 = \left(\hat{n}_1 \sigma_{(1)}\right)^2 + \left(\hat{n}_2 \sigma_{(2)}\right)^2 + \left(\hat{n}_3 \sigma_{(3)}\right)^2 \tag{2.63}$$

La componente de esfuerzo normal $\sigma_N = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ considerando las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ y de $\mathbf{n}$ en un sistema coordenado definido por los vectores base principales es:

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \hat{n}_i \hat{\sigma}_{ij} \hat{n}_j \\ &= \hat{n}_1^2 \sigma_{(1)} + \hat{n}_2^2 \sigma_{(2)} + \hat{n}_3^2 \sigma_{(3)}\end{aligned} \tag{2.64}$$

Siendo **n** un vector unitario en términos de las componentes en la base principal se cumple que:

$$\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1 \tag{2.65}$$

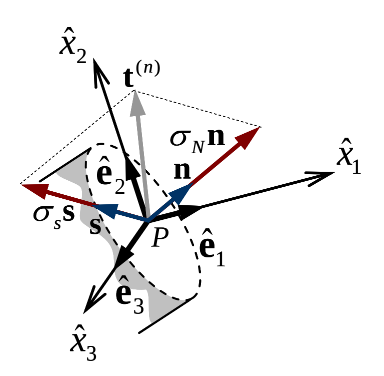


Figura 2.12. Vector tracción en *P* asociado a una superficie arbitraria de normal **n**. Componentes normal y tangencial definidas en un sistema coordenado de vectores base principal.

2.10.1. Esfuerzo normal máximo y mínimo

A continuación se obtienen los valores estacionarios de la componente de esfuerzo normal, es decir, los valores máximos, mínimos (o puntos de inflexión si existen), indicando la dirección del plano en el cual actúan tales esfuerzos.

A partir de lo indicado en el apartado anterior, si se despeja $\hat{n}_3^2$ de la Ecuación (2.65) y se reemplaza el resultado en las Ecuaciones (2.64) se tiene

$$\sigma_N = \hat{n}_1^2\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) + \hat{n}_2^2\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) + \sigma_{(3)} \tag{2.66}$$

Igualando a cero la derivada de la expresión anterior con respecto a las componentes $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ y resolviendo el sistema de ecuaciones de la forma:

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial \hat{n}_1} = 2\hat{n}_1\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) = 0 \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial \hat{n}_2} = 2\hat{n}_2\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) = 0 \tag{2.68}$$

se obtienen las siguientes soluciones. Si $\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) \neq 0$ y $\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) \neq 0$, las componentes del vector **n** corresponden a $\hat{n}_1 = 0, \hat{n}_2 = 0, \hat{n}_3 = \pm 1$. En cambio, si $\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) = 0$ y $\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) \neq 0$, las componentes $\hat{n}_1, \hat{n}_3$ no están definidas y $\hat{n}_2 = 0$. Si $\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) \neq 0$ y $\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) = 0$, las componentes $\hat{n}_2, \hat{n}_3$ no están definidas y $\hat{n}_1 = 0$. En cualquiera de estos casos la componente de esfuerzo normal σ_N adquiere un valor estacionario que coincide con el esfuerzo principal de $\sigma_{(3)}$.

De la misma manera como se obtuvo la componente de esfuerzo normal de la Ecuación (2.66) en términos de las componentes $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ del vector **n** (caso *III*), se calcula σ_N en función de $\hat{n}_1, \hat{n}_3$ (caso *II*) y en función de $\hat{n}_2, \hat{n}_3$ (caso *I*).

	I	II	III	IV	V	VI
$\hat{n}_1$	± 1	0	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\hat{n}_2$	0	± 1	0	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\hat{n}_3$	0	0	± 1	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$\sigma_S^{\max-\min}$	0	0	0	$\pm\frac{1}{2}\Delta\sigma_{1-3}$	$\pm\frac{1}{2}\Delta\sigma_{2-3}$	$\pm\frac{1}{2}\Delta\sigma_{1-2}$
$\sigma_N^{\max-\min}$	$\sigma_{(1)}$	$\sigma_{(2)}$	$\sigma_{(3)}$			

Cuadro 2.1. Componentes máximo o mínimo del esfuerzo normal y cortante y la dirección del plano sobre el cual actúa.

En cada caso se obtienen esfuerzos normales estacionarios que coinciden con los esfuerzos principales actuando sobre planos normales a las direcciones principales. Los casos *I*, *II* y *III* del **Cuadro 2.1** y de la **Figura 2.13** indican los valores máximos y mínimos de la componente de esfuerzo normal $\sigma_N^{\max - \min}$ y las respectivas direcciones de los planos donde actúan.

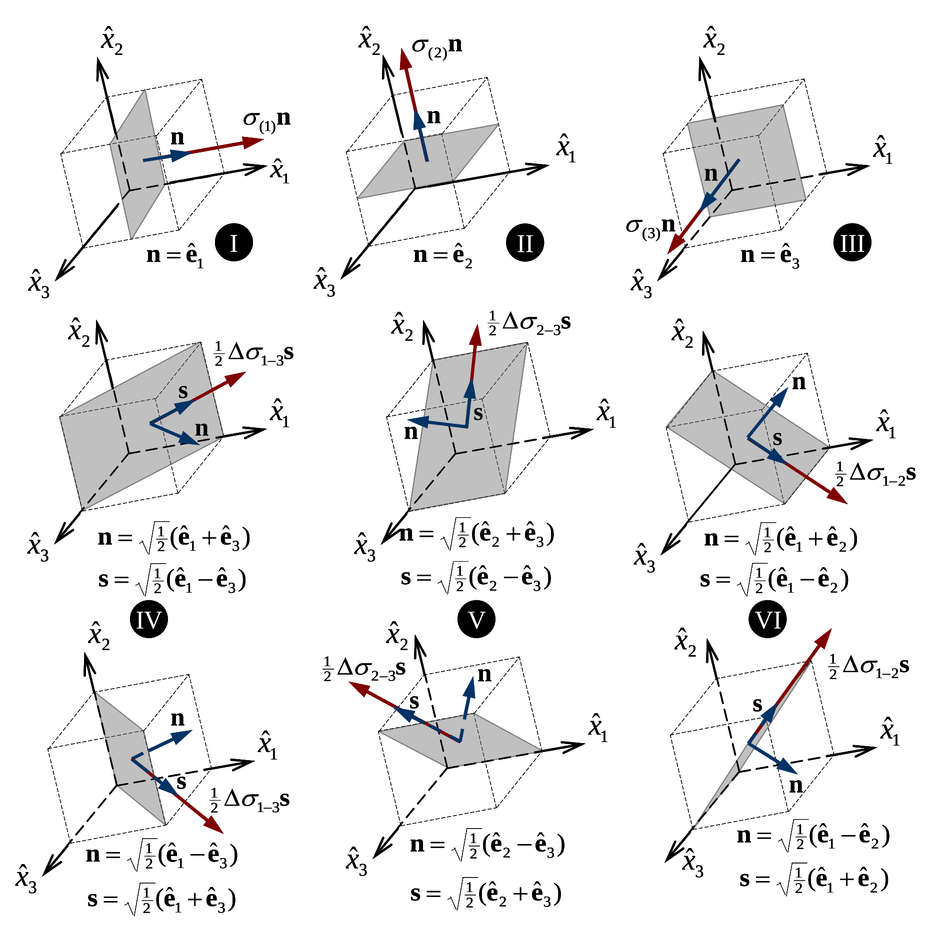


Figura 2.13. Planos donde actúan las componentes máximo o mínimo del esfuerzo normal y cortante.

2.10.2. Esfuerzo cortante máximo y mínimo

El procedimiento indicado a continuación permite establecer el valor del esfuerzo cortante máximo y la dirección del plano sobre el cual actúa.

Sustituyendo en la Ecuación (2.58) los resultados de las Ecuaciones (2.63) y (2.64) se obtiene la componente de esfuerzo cortante al cuadrado así:

$$\sigma_S^2 = \hat{n}_1^2\sigma_{(1)}^2 + \hat{n}_2^2\sigma_{(2)}^2 + \hat{n}_3^2\sigma_{(3)}^2 - \left(\hat{n}_1^2\sigma_{(1)} + \hat{n}_2^2\sigma_{(2)} + \hat{n}_3^2\sigma_{(3)}\right)^2 \qquad (2.69)$$

Recordando que **n** es un vector unitario, es decir, $\|\mathbf{n}\|^2 = \hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1$, se puede eliminar una de sus componentes al cuadrado de la Ecuación (2.69), de tal manera que quede expresada solo en función de las otras dos componentes al cuadrado.

Sustituyendo $\hat{n}_3^2 = 1 - \hat{n}_1^2 - \hat{n}_2^2$ en la Ecuación (2.69) se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma_S^2 &= \left(\sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(3)}^2\right)\hat{n}_1^2 + \left(\sigma_{(2)}^2 - \sigma_{(3)}^2\right)\hat{n}_2^2 + \sigma_{(3)}^2 - \\ &\quad - \left(\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)\hat{n}_1^2 + \left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right)\hat{n}_2^2 + \sigma_{(3)}\right)^2\end{aligned} \qquad (2.70)$$

Para obtener los valores estacionarios de la componente de esfuerzo cortante al cuadrado se igualan a cero las derivadas de la expresión anterior con respecto a las componentes $\hat{n}_1, \hat{n}_2$, y se resuelve el sistema de las dos ecuaciones:

$$\frac{\partial\left(\sigma_S^2\right)}{\partial \hat{n}_1} = \hat{n}_1 \Delta\sigma_{1-3}\left\{\Delta\sigma_{1-3} - 2\Delta\sigma_{1-3}\,\hat{n}_1^2 - 2\Delta\sigma_{2-3}\,\hat{n}_2^2\right\} = 0 \qquad (2.71)$$

$$\frac{\partial\left(\sigma_S^2\right)}{\partial \hat{n}_2} = \hat{n}_2 \Delta\sigma_{2-3}\left\{\Delta\sigma_{2-3} - 2\Delta\sigma_{1-3}\,\hat{n}_1^2 - 2\Delta\sigma_{2-3}\,\hat{n}_2^2\right\} = 0 \qquad (2.72)$$

donde,

$$\begin{aligned}&\Delta\sigma_{1-3} = \left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right), \quad \Delta\sigma_{2-3} = \left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) \\ &\Delta\sigma_{1-2} = \left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right)\end{aligned} \qquad (2.73)$$

Por inspección se establece como solución del sistema de ecuaciones que $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = 0$ para $\Delta\sigma_{1-3} \neq 0$ y $\Delta\sigma_{2-3} \neq 0$; en consecuencia $\hat{n}_3 = \pm 1$ y $\sigma_S^2 = 0$ de acuerdo con la Ecuación (2.70). Tal resultado indica que la componente de esfuerzo cortante al cuadrado toma un valor estacionario de cero sobre un plano cuya normal es igual a $\mathbf{n} = \pm\hat{\mathbf{e}}_3$, es decir, en la dirección principal $\hat{x}_3$ como se mostró anteriormente en la **Figura 2.10**.

Otra solución al sistema se encuentra considerando $\hat{n}_1 \Delta\sigma_{1-3} \neq 0$ y despejando $\hat{n}_2^2$ de la Ecuación (2.71), de donde se obtiene que $\hat{n}_2^2 = (1 - 2\hat{n}_1^2)\Delta\sigma_{1-3} / 2\Delta\sigma_{2-3}$. Sustituyendo este resultado en la Ecuación (2.72), se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\Delta\sigma_{1-3}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\Delta\sigma_{2-3}}\sqrt{1 - 2\hat{n}_1^2}\;\left\{\Delta\sigma_{2-3} - 2\Delta\sigma_{1-3}\,\hat{n}_1^2 - \Delta\sigma_{1-3}\,(1 - 2\hat{n}_1^2)\right\} = 0 \\ &\sqrt{\Delta\sigma_{1-3}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\Delta\sigma_{2-3}}\sqrt{1 - 2\hat{n}_1^2}\;\left\{\Delta\sigma_{2-3} - \Delta\sigma_{1-3}\right\} = 0\end{aligned} \qquad (2.74)$$

Siendo $\Delta\sigma_{1-3} \neq 0$, $\Delta\sigma_{2-3} \neq 0$ y $\Delta\sigma_{1-3} \neq \Delta\sigma_{2-3}$, la ecuación anterior tiene solución cuando el tercer cofactor es igual a cero, es decir:

$$\sqrt{1-2\hat{n}_1^2} = 0 \rightarrow \left(1-2\hat{n}_1^2\right) = 0 \rightarrow \hat{n}_1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad (2.75)$$

y por lo tanto las componentes del vector **n** definidas en el sistema coordenado de vectores base principal corresponden a $\hat{n}_1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \hat{n}_2 = 0, \hat{n}_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Sustituyendo las componentes de **n** en la Ecuación (2.69) se tiene que la componente de esfuerzo cortante es igual a $\sigma_S = \pm\tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)$.

De la misma manera como se obtuvo la componente de esfuerzo cortante al cuadrado de la Ecuación (2.70) en términos de las componentes $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ del vector **n** (caso *IV*), se calcula σ_S^2 en función de $\hat{n}_1, \hat{n}_3$ (caso *V*) y en función de $\hat{n}_2, \hat{n}_3$ (caso *VI*). En cada caso se obtienen dos soluciones, lo cual indica que en total existen 6 vectores **n** donde la componente de esfuerzo cortante es estacionaria. El **Cuadro 2.1** indica el esfuerzo cortante máximo y mínimo y la respectiva dirección del plano sobre el cual actúa para los casos *IV*, *V* y *VI*.

Dado que los esfuerzos principales están ordenados de mayor a menor, es decir $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > \sigma_{(3)}$, se concluye que la componente de esfuerzo cortante adopta un valor máximo de:

$$\sigma_S^{\max} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) \qquad (2.76)$$

actuando sobre un plano de normal $\mathbf{n} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3\right)$.

Si el esfuerzo cortante es igual a $\sigma_S^{\max} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)$ y el vector normal al plano sobre el cual actúa corresponde a $\mathbf{n} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3\right)$, el esfuerzo normal y el vector tracción obtenidos de las ecuaciones (2.64) y (2.62) son:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \hat{n}_1^2\sigma_{(1)} + \hat{n}_2^2\sigma_{(2)} + \hat{n}_3^2\sigma_{(3)} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)}\right) \\ \mathbf{t}^{(n)} &= \hat{n}_1\sigma_{(1)}\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{n}_2\sigma_{(2)}\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{n}_3\sigma_{(3)}\hat{\mathbf{e}}_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\sigma_{(1)}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{(3)}\hat{\mathbf{e}}_3\right) \end{aligned} \qquad (2.77)$$

Por lo tanto la dirección del esfuerzo cortante máximo **s** se puede determinar despejando sus componentes de la Ecuación (2.56), como se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{t}^{(n)} = \sigma_N \mathbf{n} + \sigma_S \mathbf{s} \\
&t_1^{(n)} = \sigma_N \hat{n}_1 + \sigma_S \hat{s}_1 \\
&\to \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sigma_{(1)} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)})\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})\hat{s}_1 \to \hat{s}_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
&t_2^{(n)} = \sigma_N \hat{n}_2 + \sigma_S \hat{s}_2 \\
&\to 0 = \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)}) \cdot 0 + \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})\hat{s}_2 \to \hat{s}_2 = 0 \\
&t_3^{(n)} = \sigma_N \hat{n}_3 + \sigma_S \hat{s}_3 \\
&\to \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sigma_{(3)} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)})\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})\hat{s}_3 \to \hat{s}_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
&\Rightarrow \mathbf{s} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3\right)
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

Mediante el mismo procedimiento se puede establecer la dirección del esfuerzo cortante máximo en los casos *IV*, *V* y *VI*. La **Figura 2.13** muestra los planos para los cuales actúa un esfuerzo cortante máximo, indicando el vector normal al plano **n** y el vector unitario **s** que lleva la dirección de $\sigma_S^{\max}$.

2.11. Estados factibles del esfuerzo normal y cortante

Sea un estado de esfuerzos en un punto *P* cuyas componentes se establecen con respecto al sistema coordenado de vectores base principal $\hat{\mathbf{e}}_i$ como se muestra en **Figura 2.10**. Retomando las Ecuaciones (2.63), (2.64) y (2.65), se puede organizar el siguiente sistema de 3 ecuaciones en términos de las componentes del vector $\mathbf{n} = \hat{n}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ y las componentes de esfuerzo normal y cortante.

$$\sigma_N = \hat{n}_1^2 \sigma_{(1)} + \hat{n}_2^2 \sigma_{(2)} + \hat{n}_3^2 \sigma_{(3)} \tag{2.79}$$

$$\sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \hat{n}_1^2 \sigma_{(1)}^2 + \hat{n}_2^2 \sigma_{(2)}^2 + \hat{n}_3^2 \sigma_{(3)}^2 \tag{2.80}$$

$$\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1 \tag{2.81}$$

Despejando $\hat{n}_3^2$ de la ecuación anterior y reemplazando el resultado en las Ecuaciones (2.80) y (2.79) se tiene

$$\sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \hat{n}_1^2\left(\sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(3)}^2\right) + \hat{n}_2^2\left(\sigma_{(2)}^2 - \sigma_{(3)}^2\right) + \sigma_{(3)}^2 \quad (2.82)$$

$$\sigma_N = \hat{n}_1^2\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right) + \hat{n}_2^2\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right) + \sigma_{(3)} \quad (2.83)$$

Después de despejar $\hat{n}_2^2$ de la ecuación anterior y sustituirlo en la Ecuación (2.82) se llega a la siguiente expresión de las componentes de esfuerzo en función de $\hat{n}_1^2$ solamente.

$$\begin{aligned}&\sigma_N^2 - \sigma_N\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right) + \sigma_{(2)}\sigma_{(3)} + \sigma_S^2 = \\ &\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right)\hat{n}_1^2\end{aligned} \quad (2.84)$$

Dado que la componente $\hat{n}_1^2$ tiene un rango definido entre 0 y 1, se pueden representar los valores factibles de la relación entre las componentes de esfuerzo normal y cortante mediante una gráfica de abscisa σ_N y ordenada σ_S. El resultado corresponde a la región limitada por dos círculos de centro en $(C,0)$ y de radios $R^{\min}$ y $R^{\max}$ definidos en general de la forma:

$$\left(\sigma_N - C\right)^2 + \sigma_S^2 = R^2 \quad donde \quad R^{\min} \le R \le R^{\max} \quad (2.85)$$

Cada uno de los círculos se denomina *círculo de Mohr para esfuerzos*. Reordenando la Ecuación (2.84) se tiene que:

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_N - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)\right)^2 + \sigma_S^2 \\ &= \left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right)\hat{n}_1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right)\right)^2\end{aligned} \quad (2.86)$$

Comparando la Ecuación (2.85) con la expresión anterior se establece que ésta última representa gráficamente la región limitada por dos círculos de centro $C = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)$ y de radios entre $R^{\min} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right)$ para $\hat{n}_1^2 = 0$ y $R^{\max} = \left|\sigma_{(1)} - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)\right|$ para $\hat{n}_1^2 = 1$. Como lo muestra la **Figura 2.14**, la zona en color gris corresponde a las parejas de valores de esfuerzo normal y cortante (σ_N, σ_S) factibles de acuerdo con el rango de variación de $0 \le \hat{n}_1^2 \le 1$.

De la misma forma se obtienen y representan las regiones donde (σ_N, σ_S) es admisible con las ecuaciones (2.79), (2.80) y (2.81), considerando que $0 \le \hat{n}_2^2 \le 1$ y $0 \le \hat{n}_3^2 \le 1$. El **Cuadro 2.2** indica el centro y el radio mínimo y máximo de los círculos de Mohr correspondientes.

La intersección de los círculos de Mohr entre las tres regiones factibles mostrada en la **Figura 2.15**, corresponde a la zona donde las

parejas de componentes de esfuerzo normal y cortante (σ_N, σ_S) son comúnmente admisibles. Asimismo, los círculos de Mohr para esfuerzos permiten establecer los valores máximos y mínimos de las componentes de esfuerzo normal y cortante como se indica en la **Figura 2.16(a)**. Tales esfuerzos actúan sobre los planos representados en la **Figura 2.16 (b)**.

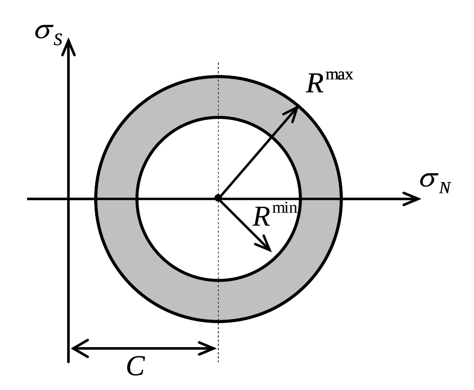


Figura 2.14. Valores factibles de componentes de esfuerzo normal y cortante considerando el rango de variación de $\hat{n}_1^2$.

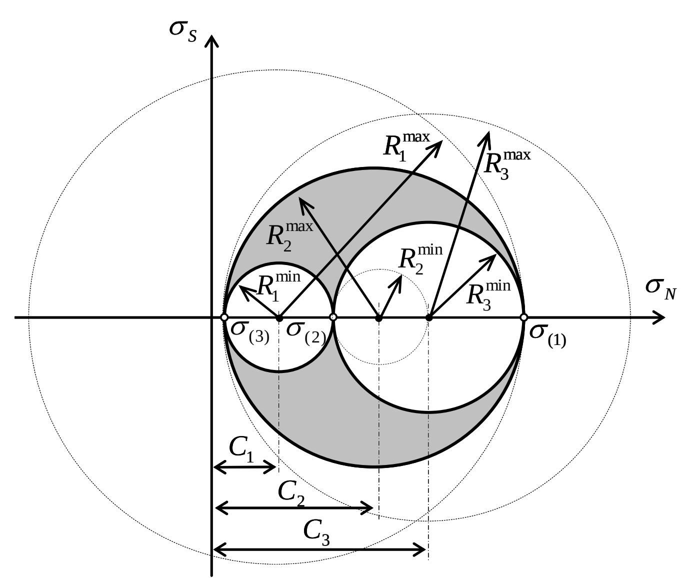


Figura 2.15. Círculos de Mohr para esfuerzos. Valores factibles de las componentes de esfuerzo normal y cortante. El centro y el radio de los círculos están indicados en el **Cuadro 2.2** .

variable	rango	centro	radio mínimo / máximo
$\hat{n}_1$	$0 \le \hat{n}_1^2 \le 1$	$C_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)$	$R_1^{\min} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right)$ $R_1^{\max} = \left\vert\sigma_{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)\right\vert$
$\hat{n}_2$	$0 \le \hat{n}_2^2 \le 1$	$C_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)}\right)$	$R_2^{\min} = \left\vert\sigma_{(2)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)}\right)\right\vert$ $R_2^{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right)$
$\hat{n}_3$	$0 \le \hat{n}_3^2 \le 1$	$C_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}\right)$	$R_3^{\min} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right)$ $R_3^{\max} = \left\vert\sigma_{(3)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}\right)\right\vert$

Cuadro 2.2. Características de los círculos de Mohr que delimitan la región de parejas factibles de esfuerzo normal y cortante.

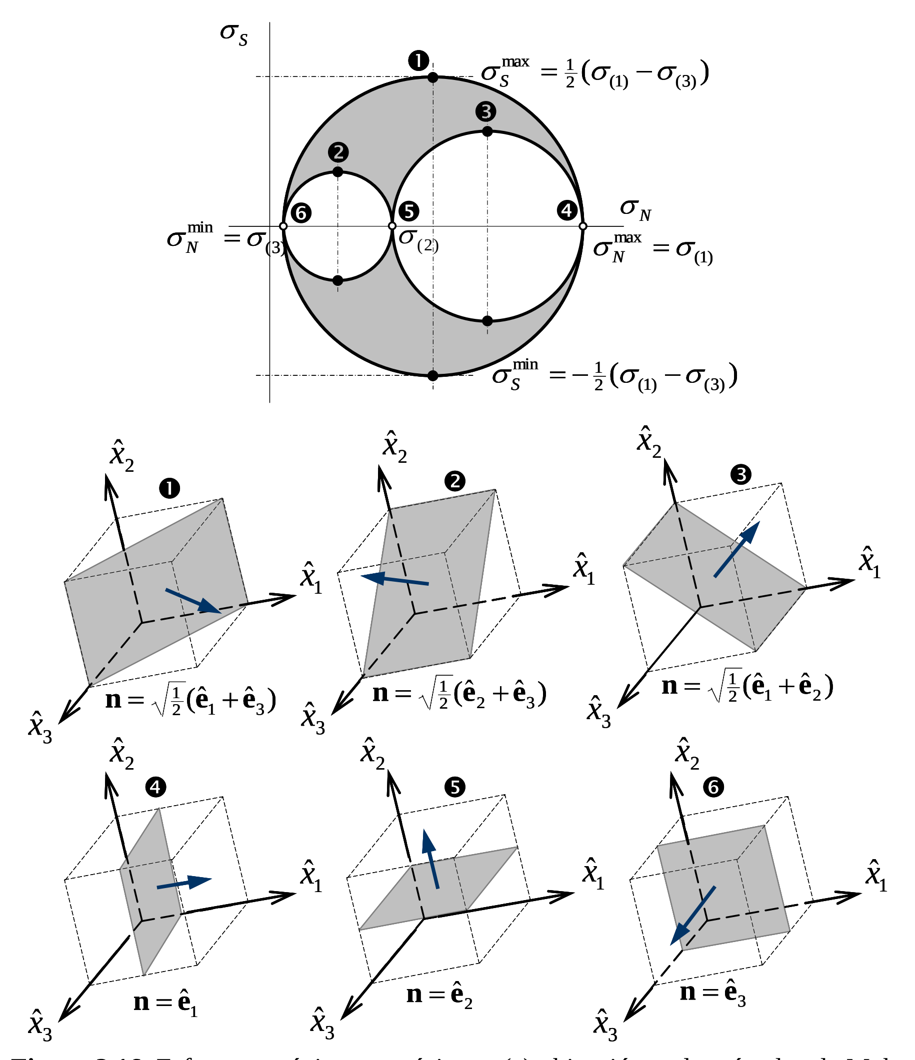


Figura 2.16. Esfuerzos máximos y mínimos: (a) ubicación en los círculos de Mohr de los valores máximos de esfuerzos normales y cortantes, (b) plano sobre el cual actúan tales esfuerzos.

2.12. Estado de esfuerzos esférico y desviador

Se define como *esfuerzo normal medio* del tensor de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ al promedio aritmético de las componentes de esfuerzo normal, es decir $\sigma_M = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$. Recordando que la sumatoria de los componentes σ_{ii} es la traza del tensor de esfuerzos, la cual es una cantidad invariante con respecto al sistema coordenado establecido, el esfuerzo normal medio corresponde a:

$$\sigma_M = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = \tfrac{1}{3}\sigma_{ii} = \tfrac{1}{3}\overline{\sigma}_{ii} \tag{2.87}$$

El estado de esfuerzos para el cual los tres valores principales de esfuerzo son iguales al esfuerzo normal medio se denomina *estado esférico de esfuerzos* y se expresa en notación compacta e indicial de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{esf} &= \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{1} = \sigma_M\,\mathbf{1} \\ \sigma_{ij}^{esf} &= \left(\tfrac{1}{3}\sigma_{rr}\right)\delta_{ij} = \sigma_M\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.88}$$

La representación matricial de las componentes de tal estado de esfuerzos con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ corresponde a una matriz diagonal igual a:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{esf}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

Observación. *Como resultado de calcular las direcciones principales como se indicó en los Apartados 1.6.11 y 2.9, se concluye que cualquier sistema coordenado de referencia coincide con las direcciones principales en un estado esférico de esfuerzos. Un ejemplo clásico es el esfuerzo en un fluido en reposo denominado esfuerzo hidrostático, el cual está expresado como* $-p_0\mathbf{1}$ *siendo* p_0 *la presión estática del fluido.*

Dado que todo estado de esfuerzos se puede descomponer como la suma tensorial de su parte esférica y su parte desviadora de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{esf} + \boldsymbol{\sigma}^{dev} = \sigma_M\,\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}^{dev} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_M\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{dev} \end{aligned} \tag{2.90}$$

el *estado desviador de esfuerzos* o simplemente *esfuerzo desviador* $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ se determina en notación compacta e indicial así:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{dev} &= \boldsymbol{\sigma} - \sigma_M \mathbf{1} \\ \sigma_{ij}^{dev} &= \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\sigma_{rr}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.91}$$

La representación matricial de las componentes de tal estado de esfuerzos con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ corresponde a una matriz simétrica igual a:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{dev}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

> ***Observación***. *Se puede demostrar que las direcciones principales del tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma}$ *coinciden con las direcciones principales de su parte desviadora.*

A partir del cálculo de valores propios en tensores de segundo orden presentado en el Apartado 1.6.11, los valores principales del esfuerzo desviador $\sigma_{(p)}^{dev} = \sigma_{(1)}^{dev}, \sigma_{(2)}^{dev}, \sigma_{(3)}^{dev}$ se obtienen de la forma:

$$\det\left(\sigma_{ji}^{dev} - \delta_{ji}\,\sigma_{(p)}^{dev}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \left(\sigma_{11} - \sigma_M - \sigma_{(p)}^{dev}\right) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \left(\sigma_{22} - \sigma_M - \sigma_{(p)}^{dev}\right) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \left(\sigma_{33} - \sigma_M - \sigma_{(p)}^{dev}\right) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.93}$$

La expresión anterior es una ecuación polinómica de tercer orden, denominada ecuación característica del tensor de esfuerzo desviador, la cual se expresa como:

$$\left(\sigma_{(p)}^{dev}\right)^3 - J_1\left(\sigma_{(p)}^{dev}\right)^2 + J_2\,\sigma_{(p)}^{dev} - J_3 = 0 \tag{2.94}$$

donde J_1, J_2, J_3 corresponden al primero, segundo y tercer invariante del esfuerzo desviador respectivamente, definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{kk}^{dev} = 0 \\ J_2 &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\sigma_{kk}^{dev}\right)^2 - \sigma_{ij}^{dev}\sigma_{ij}^{dev}\right] = -\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}^{dev}\sigma_{ij}^{dev} \\ J_3 &= \det\left(\sigma_{ij}^{dev}\right) \end{aligned} \tag{2.95}$$

2.13. Esfuerzo cortante octaédrico

Sea P un punto sobre un plano cuyo vector normal unitario $\tilde{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)$ tiene componentes iguales con respecto a los vectores de la base principal $\hat{\mathbf{e}}_i$, como se ilustra en la **Figura 2.17**. Dicho plano se denomina *plano octaédrico*, porque corresponde a la cara de un octaedro regular en el primer octante.

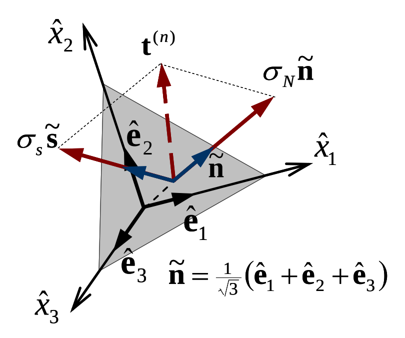


Figura 2.17. Vector tracción actuando sobre un plano octaédrico.

De acuerdo con la Ecuación (2.63) la norma al cuadrado del vector tracción actuando sobre el plano octaédrico, es decir para $\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}$, es igual a:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{t}^{(n)}(\tilde{\mathbf{n}}) \right\|^2 &= \left(\hat{n}_1 \sigma_{(1)}\right)^2 + \left(\hat{n}_2 \sigma_{(2)}\right)^2 + \left(\hat{n}_3 \sigma_{(3)}\right)^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{(1)}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{(2)}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{(3)}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\left(\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(3)}^2\right) \end{aligned} \tag{2.96}$$

Asimismo, la componente de esfuerzo normal definida en la Ecuación (2.64) para dicho plano es:

$$\begin{aligned} \sigma_N(\tilde{\mathbf{n}}) &= \hat{n}_1^2 \sigma_{(1)} + \hat{n}_2^2 \sigma_{(2)} + \hat{n}_3^2 \sigma_{(3)} \\ &= \tfrac{1}{3}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right) \end{aligned} \tag{2.97}$$

A partir de los resultados anteriores se obtiene la componente de esfuerzo cortante indicada en la Ecuación (2.58) en el plano octaédrico como:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \left\| \mathbf{t}^{(n)} \right\|^2 - \sigma_N^2 \\ \sigma_S^2(\tilde{\mathbf{n}}) &= \tfrac{1}{3}\left(\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(3)}^2\right) - \tfrac{1}{9}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

La componente de esfuerzo cortante contenida en el plano octaédrico τ_{oct} se denomina *esfuerzo cortante octaédrico* y se define como:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_S(\tilde{\mathbf{n}}) = \tau_{oct} \\
&\tau_{oct} = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2}
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

Tal esfuerzo es muy útil en el *criterio de fluencia de von Mises* que se estudiará en el Capítulo 7.

2.14. Estado plano de esfuerzos

El *estado plano o condición plana de esfuerzos* es una simplificación del estado tridimensional, en el cual las componentes de esfuerzo contenidas en un plano coordenado específico pueden ser diferentes de cero, mientras que las demás componentes son nulas. La **Figura 2.18** muestra una viga y una lámina sometidas a cargas en el plano x_1x_2, como ejemplos de la condición plana de esfuerzos en dicho plano. En condición plana de esfuerzos en x_1x_2, el estado de esfuerzos es el mismo para todos los planos paralelos a x_1x_2 dentro del sólido, de tal manera que los esfuerzos estarán definidos en un espacio bidimensional.

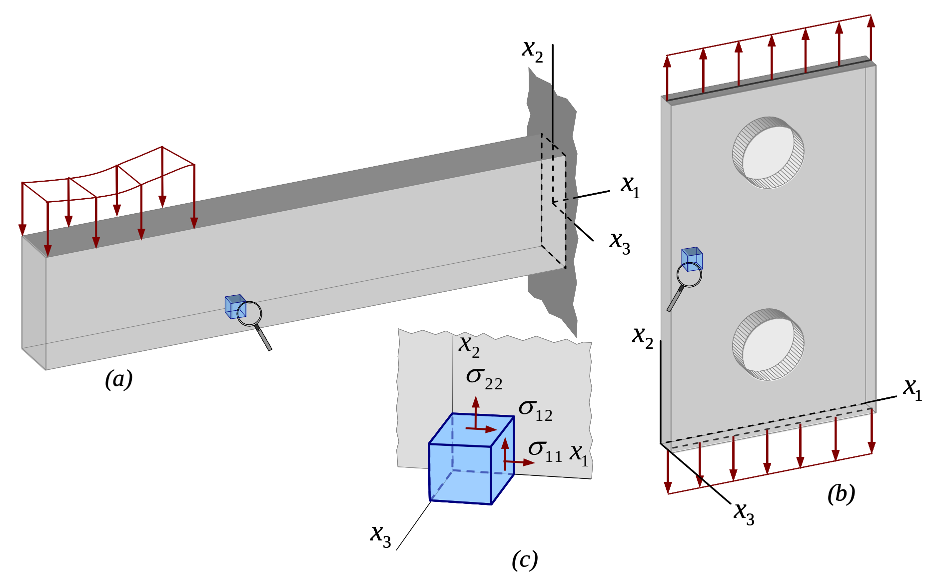


Figura 2.18. Sólido en condición plana de esfuerzos en el plano x_1x_2: (a) viga sometida a flexión y cortante, (b) lámina sometida a tensión, (c) estado de esfuerzos en un elemento infinitesimal.

En general se considera un sólido que cumple con la condición plana de esfuerzos en el plano x_1x_2 definido en un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$. Por lo tanto la matriz de componentes del tensor de esfuerzos en dicho sistema coordenado es de la forma:

$$[\boldsymbol{\sigma}]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2.100}$$

2.14.1. Transformación de las componentes de esfuerzo

Sea $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ un nuevo sistema coordenado definido por los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ cuyo eje $\bar{x}_3$ coincide con el eje x_3 del sistema coordenado original definido por los vectores base $\mathbf{e}_i$. Por lo tanto $\bar{\mathbf{e}}_3=\mathbf{e}_3$ y el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2$ es el mismo plano x_1x_2 como lo ilustra la **Figura 2.19**.

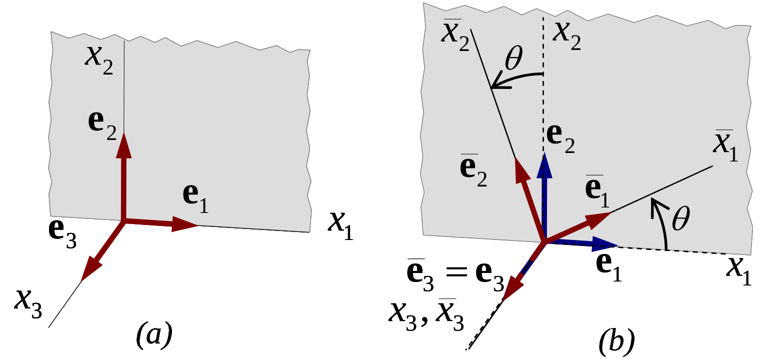


Figura 2.19. Transformación entre sistemas coordenados cartesianos para un estado plano de esfuerzos definido por: (a) vectores base $\mathbf{e}_i$ y (b) vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$.

La matriz de componentes de esfuerzos definidas en un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ se puede escribir de la forma:

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}]=\begin{bmatrix}\bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & 0\\ \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2.101}$$

Dada la relación entre los dos sistemas coordenados, existe un ángulo θ contenido en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2\equiv x_1x_2$, definido entre los ejes x_1 y $\bar{x}_1$ o entre los ejes x_2 y $\bar{x}_2$, y de magnitud positiva en el sentido positivo del eje $\bar{x}_3\equiv x_3$.

De acuerdo con la ley de transformación de componentes de esfuerzo entre dos sistemas coordenados indicada en la Ecuación (2.18), la matriz de las componentes de esfuerzo en la nueva base es igual a $[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] = [\mathbf{M}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{M}]^T$, donde los términos de la matriz de transformación $[\mathbf{M}]$ corresponden a los productos punto entre los vectores de las dos bases, es decir $M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Para la condición plana de esfuerzos en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2 \equiv x_1x_2$ los coeficientes de transformación son iguales a:

$$\begin{array}{ccc} M_{11} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\theta & M_{12} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \sin\theta & M_{13} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ M_{21} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -\sin\theta & M_{22} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\theta & M_{23} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ M_{31} = \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 & M_{32} = \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 & M_{33} = \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \end{array} \quad (2.102)$$

De acuerdo con los coeficientes indicados anteriormente la matriz de transformación para un estado plano de esfuerzos es de la forma:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Por lo tanto las componentes de esfuerzo en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$ son iguales a:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ \bar{\sigma}_{22} &= \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ \bar{\sigma}_{12} &= (-\sigma_{11} + \sigma_{22})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{33} = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Recordando las relaciones trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sin^2\theta &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad (2.105)$$

se pueden reescribir las ecuaciones previas de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\sigma}_{22} &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\sigma}_{12} &= -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta \\ \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{33} = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

2.14.2. Esfuerzos y direcciones principales

A continuación se evalúan los esfuerzos principales y las respectivas direcciones principales para un estado de esfuerzos en el cual las componentes $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ son iguales a cero como se muestra en la **Figura 2.21(a)**.

Para condición plana las invariantes de esfuerzo I_1, I_2, I_3 indicadas en la Ecuación (2.52) corresponden a:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^2\right\} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \\ I_3 &= \det\boldsymbol{\sigma} = 0 \end{aligned} \tag{2.107}$$

La ecuación característica del tensor de esfuerzos dada en la Expresión (2.51) se reduce a un factor $\sigma_{(p)}$ multiplicado por una ecuación cuadrática de la forma:

$$\sigma_{(p)}\left[\sigma_{(p)}^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{(p)} + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\right] = 0 \tag{2.108}$$

Sean $\sigma_{(a)}, \sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}$ los esfuerzos principales sin ordenar, se encuentra que uno de los esfuerzos principales $\sigma_{(a)}$ es igual a cero y que los otros dos $\sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}$ son las raíces de la ecuación cuadrática del segundo cofactor de la expresión anterior, es decir:

$$\begin{aligned} &\sigma_{(a)} = 0 \\ &\sigma_{(b)}, \sigma_{(c)} = \tfrac{1}{2}\left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\right] \end{aligned} \tag{2.109}$$

Por lo tanto, en condición plana de esfuerzos uno de los esfuerzos principales es igual a cero y su dirección es perpendicular al plano considerado, mientras que los otros dos esfuerzos principales están contenidos en el plano.

El esfuerzo principal igual a cero $\sigma_{(a)}$ podría ser el esfuerzo principal mayor $\sigma_{(1)}$, el esfuerzo principal intermedio $\sigma_{(2)}$ o el esfuerzo principal menor $\sigma_{(3)}$ como lo indican los círculos de Mohr para esfuerzo plano de la **Figura 2.20(a)**, **(b)** y **(c)** respectivamente.

A continuación se considera que los esfuerzos principales $\sigma_{(a)}, \sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}$ no están ordenados y que la dirección asociada al esfuerzo principal igual a cero se escoge arbitrariamente como la dirección asociada al esfuerzo principal $\sigma_{(3)}$. Por lo tanto la matriz de las componentes del tensor de esfuerzos en la base principal mostrada en la **Figura 2.21(b)**, se escribe como:

$$[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]=\begin{bmatrix}\sigma_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2.110}$$

Como lo expresa la Ecuación (2.109) los esfuerzos principales son iguales a:

$$\sigma_{(1)},\sigma_{(2)}=\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_{11}+\sigma_{22})\pm\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2}\right] \tag{2.111}$$

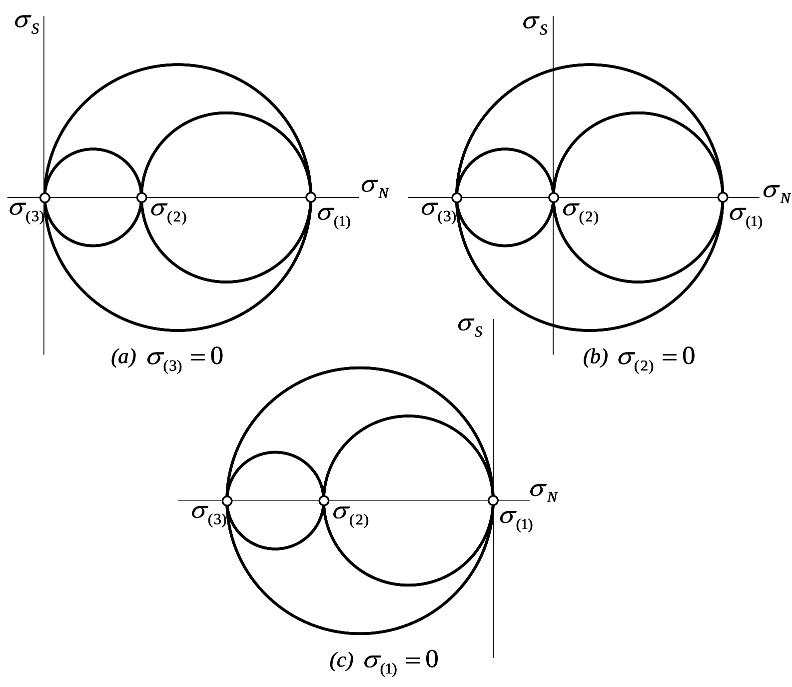


Figura 2.20. Círculos de Mohr para estado plano de esfuerzos.

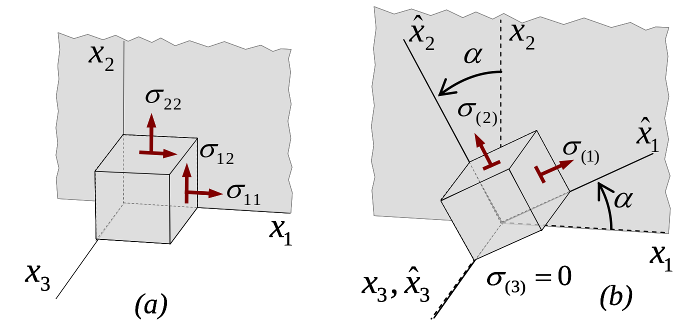


Figura 2.21. Componentes en un estado plano de esfuerzos en el plano x_1x_2.

Las direcciones principales obtenidas a partir de las ecuaciones (2.48) y (2.49) son aplicadas a un estado plano de esfuerzos de la forma:

$$\begin{bmatrix} \left(\sigma_{11}-\sigma_{(p)}\right) & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \left(\sigma_{22}-\sigma_{(p)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(p)} \\ n_2^{(p)} \\ n_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

Dado un vector $\mathbf{n}^{(1)}$ orientado en la dirección principal $\hat{x}_1$ asociada al esfuerzo principal $\sigma_{(1)}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{11}-\sigma_{(1)}\right)n_1^{(1)} + \sigma_{12}n_2^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{12}n_1^{(1)} + \left(\sigma_{22}-\sigma_{(1)}\right)n_2^{(1)} &= 0 \\ -\sigma_{(1)}n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.113}$$

Si $\sigma_{(1)} \neq 0$, la componente $n_3^{(1)} = 0$ en la tercera ecuación. Como lo indica la **Figura 2.21(b)**, la dirección principal asociada a $\sigma_{(1)}$ está determinada por un vector de la forma $\mathbf{n}^{(1)} = \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2$, siendo α el ángulo definido entre el eje x_1 y el eje principal $\hat{x}_1$. Sustituyendo las componentes $n_1^{(1)} = \cos\alpha, n_2^{(1)} = \sin\alpha, n_3^{(1)} = 0$ en las dos primeras ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{11}-\sigma_{(1)}\right)\cos\alpha + \sigma_{12}\sin\alpha &= 0 \\ \sigma_{12}\cos\alpha + \left(\sigma_{22}-\sigma_{(1)}\right)\sin\alpha &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.114}$$

Dividiendo entre $\cos\alpha$ a ambos lados de la primera y segunda ecuación se obtienen dos expresiones para evaluar las direcciones principales en términos del ángulo formado entre x_1 y $\hat{x}_1$, de la forma:

$$\tan\alpha = -\frac{\sigma_{11}-\sigma_{(1)}}{\sigma_{12}} \quad , \quad \tan\alpha = -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}-\sigma_{(1)}} \tag{2.115}$$

Ahora, si $\mathbf{n}^{(2)}$ es vector orientado en la dirección principal $\hat{x}_2$ asociada al esfuerzo principal $\sigma_{(2)}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{11}-\sigma_{(2)}\right)n_1^{(2)} + \sigma_{12}n_2^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{12}n_1^{(2)} + \left(\sigma_{22}-\sigma_{(2)}\right)n_2^{(2)} &= 0 \\ -\sigma_{(2)}n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.116}$$

Si $\sigma_{(2)} \neq 0$, la componente $n_3^{(2)} = 0$ en la tercera ecuación. Como lo indica la **Figura 2.21(b)** la dirección principal asociada a $\sigma_{(2)}$ está definida por un vector de la forma $\mathbf{n}^{(2)} = -\sin\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{e}_2$.

Sustituyendo las componentes $n_1^{(2)} = -\sin\alpha, n_2^{(1)} = \cos\alpha, n_3^{(1)} = 0$ en las dos primeras ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} -\left(\sigma_{11} - \sigma_{(2)}\right)\sin\alpha + \sigma_{12}\cos\alpha &= 0 \\ -\sigma_{12}\sin\alpha + \left(\sigma_{22} - \sigma_{(2)}\right)\cos\alpha &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Dividiendo entre $\cos\alpha$ a ambos lados de la primera y segunda ecuación se obtiene otra forma de calcular el ángulo α, así:

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{(2)}} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{(2)}}{\sigma_{12}} \tag{2.118}$$

Finalmente, el vector $\mathbf{n}^{(3)}$ asociado al esfuerzo principal $\sigma_{(3)} = 0$ se calcula sustituyendo el valor del esfuerzo principal en la Ecuación (2.112) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1^{(3)} + \sigma_{12}n_2^{(3)} &= 0 \\ \sigma_{12}n_1^{(3)} + \sigma_{22}n_2^{(3)} &= 0 \\ 0 = 0 \quad &para\ n_3^{(3)} \neq 0 \end{aligned} \tag{2.119}$$

Despejando la componente $n_2^{(3)}$ de la segunda ecuación y reemplazándola en la primera se tiene que $\left(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2\right)n_1^{(3)} = 0$. Dado que el factor entre paréntesis en general no es igual a cero, la componente $n_1^{(3)} = 0$ y en consecuencia $n_2^{(3)} = 0$. Por lo tanto la dirección del esfuerzo principal $\sigma_{(3)} = 0$ está dada por el vector $\mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{e}_3$.

2.14.3. Esfuerzos normales máximo y mínimo en el plano

Como se indicó anteriormente, dos de los esfuerzos principales corresponden a los esfuerzos normales máximo y mínimo. Por lo tanto, si se deriva la función del esfuerzo normal $\bar{\sigma}_{11}$ en la dirección $\bar{x}_1$ y se iguala a cero, se puede identificar el ángulo α para el cual $\bar{\sigma}_{11}$ adquire un valor máximo y mínimo o los valores principales de esfuerzo contenidos en el plano. Derivando la primera ecuación de (2.106) con respecto al ángulo θ se tiene que:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial\theta} = -\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\sin 2\theta + 2\sigma_{12}\cos 2\theta$$

La expresión anterior se iguala a cero y se divide entre $\cos 2\theta$, con el fin de obtener otra expresión del ángulo $\theta = \alpha$ de la forma:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)} \tag{2.120}$$

Si se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto adyacente a un ángulo 2α es $\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ y el cateto opuesto es σ_{12}, se obtiene que:

$$R = \sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}))^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{R} \quad , \quad \sin 2\alpha = \frac{\sigma_{12}}{R}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (2.106) se obtienen los esfuerzos normales máximo y mínimo, los cuales son iguales a los esfuerzos principales contenidos en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2$, presentados en las dos primeras expresiones de la ecuación (2.109), es decir,

$$\bar{\sigma}_{11}^{\max} = \sigma_{(b),(c)} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}))^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.121}$$

En general, los esfuerzos normales máximo y mínimo son iguales a:

$$\begin{aligned} \sigma_N^{\max} &= \sigma_{(1)} = \max(0, \sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}) \\ \sigma_N^{\min} &= \sigma_{(3)} = \min(0, \sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}) \end{aligned} \tag{2.122}$$

2.14.4. Esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el plano

La tercera expresión de la ecuación (2.106) indica el esfuerzo cortante en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2$. La derivada de este esfuerzo cortante es igual a:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \theta} = -\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\cos 2\theta - 2\sigma_{12}\sin 2\theta$$

Si la expresión anterior se iguala a cero y se divide entre $\cos 2\theta$, se obtiene el ángulo $\theta = \alpha_s$ para el cual el esfuerzo cortante alcanza un valor máximo o mínimo, así:

$$\tan 2\alpha_s = -\frac{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)}{2\sigma_{12}} \tag{2.123}$$

Si se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto adyacente a un ángulo $2\alpha_s$ es σ_{12} y el cateto opuesto es $-\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$, se obtiene que:

$$R = \sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}))^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\cos 2\alpha_s = \frac{\sigma_{12}}{R} \quad , \quad \sin 2\alpha_s = -\frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{R}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la tercera expresión de la ecuación (2.106), se obtiene el esfuerzo cortante máximo y mínimo contenido en el plano, de la forma:

$$\bar{\sigma}_{12}^{\max} = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}))^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.124}$$

Reemplazando la ecuación (2.121) en la expresión anterior, se tiene que:

$$\bar{\sigma}_{12}^{\max} = \pm\tfrac{1}{2}(\sigma_{(b)} - \sigma_{(c)}) \tag{2.125}$$

En general, dentro o fuera del plano, el esfuerzo cortante máximo está definido en la ecuación (2.76), después de ordenar los esfuerzos principales $\sigma_{(a)}, \sigma_{(b)}, \sigma_{(c)}$ como $\sigma_{(1)} \geq \sigma_{(2)} \geq \sigma_{(3)}$.

2.14.5. Circulo de Mohr en esfuerzos

El estado plano de esfuerzo indicado en la Ecuación (2.100) se puede representar mediante el círculo de Mohr trazado con línea continua en la **Figura 2.22(a)**. Allí se identifican los valores de las componentes de esfuerzo (σ_N, σ_S) actuando en superficies cuyas normales están contenidas en el plano $x_1 x_2$ exclusivamente, es decir cuando la componente $\hat{n}_3 = 0$.

Como lo indica el tercer renglón del **Cuadro 2.2** para $\hat{n}_3 = 0$, la circunferencia que suscribe el círculo de Mohr tiene un radio $R = R_3^{\min} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})$ y su centro está ubicado a una distancia $C = C_3 = \tfrac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)})$. Sustituyendo la Ecuación (2.111) se obtiene un radio $R = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}$ y un centro $C = \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Reemplazando los resultados anteriores en la Ecuación (2.85) se obtiene la expresión de una circunferencia de la forma:

$$\left[\sigma_N - \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]^2 + \sigma_S^2 = \tfrac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 \tag{2.126}$$

Además, el esfuerzo cortante máximo en el plano $x_1 x_2$ corresponde con dicho radio del círculo. Para establecer las componentes de esfuerzo sobre una superficie de normal arbitraria, es decir, que en general no está

contenida en el plano x_1x_2, se deben incluir los dos círculos de Mohr indicados con línea punteada en la **Figura 2.22(b)**. Allí se observa que el esfuerzo cortante máximo puede ocurrir fuera del plano establecido en la condición plana de esfuerzos.

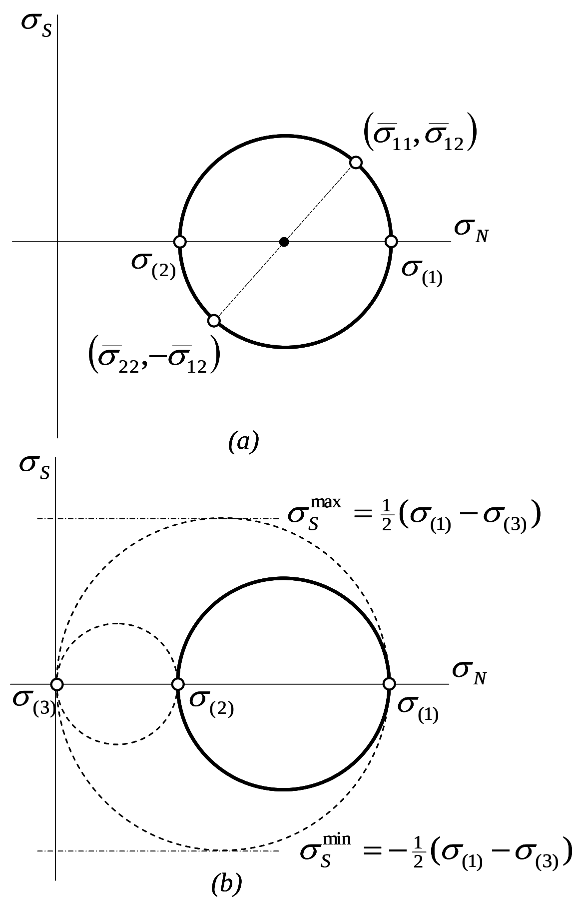


Figura 2.22. Círculo de Mohr para un estado plano de esfuerzos definido en el plano x_1x_2.

2.15. Algunos estados de esfuerzos comunes

A partir del estado tridimensional de esfuerzos se pueden identificar, bajo ciertas condiciones, algunos estados de esfuerzos comunes como por ejemplo el *esfuerzo hidrostático* indicado en el Apartado 0 y el *estado plano de esfuerzos* descrito en el Apartado 2.14. A continuación se indican otros estados de esfuerzos típicos de la mecánica de sólidos.

- El *esfuerzo axial uniforme en dirección* x_1 está dado por un tensor de esfuerzos cuya matriz de componentes en el sistema coordenado $x_1x_2x_3$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

  donde σ_0 es una constante que representa el valor de esfuerzo axial. Una de las direcciones principales de esfuerzo coincide con el eje x_1, en cambio, las otras dos corresponden a cualquier pareja de direcciones mutuamente ortogonales y que además son ortogonales con respecto al eje x_1.

- El *esfuerzo cortante uniforme contenido en el plano* x_1x_2 está dado por un tensor de esfuerzos cuya matriz de componentes en el sistema coordenado $x_1x_2x_3$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.128}$$

  donde τ es una constante que representa el valor de esfuerzo cortante. Siendo un caso especial de un estado plano de esfuerzos, la dirección principal $\hat{x}_3$ coincide con el eje x_3, en cambio las direcciones principales $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, contenidas en el plano x_1x_2, conforman un ángulo de 45º con respecto a los ejes x_1 y x_2.

- En *una viga prismática sometida a flexión pura alrededor del eje* x_3 cuyo eje longitudinal es x_1, el estado de esfuerzos tiene las siguientes componentes en el sistema coordenado $x_1x_2x_3$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{M_0 x_2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.129}$$

donde *I* es la inercia de la sección transversal con respecto a x_3 .y *M0* es el momento flector actuante. La variación lineal de la componente de esfuerzo normal en dirección x_1 es válida si el material que constituye la barra cumple con la *ley de Hooke*. Las direcciones principales de esfuerzo corresponden a las indicadas en el caso especial de *esfuerzo axial uniforme en dirección* x_1 .

- En *una barra cilíndrica sometida a torsión pura alrededor de su eje longitudinal* x_1, el estado de esfuerzos tiene las siguientes componentes en el sistema coordenado $x_1 x_2 x_3$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -G\theta x_3 & G\theta x_2 \\ -G\theta x_3 & 0 & 0 \\ G\theta x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

donde *G* es el módulo de elasticidad a cortante y θ es el ángulo de torsión por unidad de longitud. La variación lineal de las componentes de esfuerzo cortante es válida si la sección de la barra es circular y el material que la constituye cumple con la *ley de Hooke*. Las direcciones principales de esfuerzo asociadas a esfuerzos principales diferentes de cero describen una línea helicoidal sobre la superficie del cilindro, es decir, actúan a 45º del eje longitudinal. En cambio, la dirección principal asociada al esfuerzo principal nulo coincide con la dirección radial del cilindro.

2.16. Componentes de esfuerzo en notación de Voigt

De acuerdo con la *notación de Voigt*, las componentes de esfuerzo normal y cortante pueden representarse mediante una matriz columna $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ cuyos términos están organizados de la siguiente manera:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T \tag{2.131}$$

En particular para la *condición plana de esfuerzos*, la matriz columna $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ se puede reducir de la forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \tag{2.132}$$

Las componentes de esfuerzos en un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ se pueden obtener de la siguiente operación matricial:

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{2.133}$$

donde $[\mathbf{T}]$ es la matriz de transformación de sistema coordenado de las componentes de esfuerzo en notación de Voigt. Para un estado tridimensional de esfuerzos dado por la Ecuación (2.15), tal relación es de la forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{pq} &= M_{pi}\sigma_{ij}M_{qj} \\
\bar{\sigma}_{pq} &= M_{p1}\sigma_{11}M_{q1} + M_{p1}\sigma_{12}M_{q2} + M_{p1}\sigma_{13}M_{q3} + \\
&\quad + M_{p2}\sigma_{21}M_{q1} + M_{p2}\sigma_{22}M_{q2} + M_{p2}\sigma_{23}M_{q3} + \\
&\quad + M_{p3}\sigma_{31}M_{q1} + M_{p3}\sigma_{32}M_{q2} + M_{p3}\sigma_{33}M_{q3} \\
\bar{\sigma}_{pq} &= M_{p1}M_{q1}\sigma_{11} + M_{p2}M_{q2}\sigma_{22} + M_{p3}M_{q3}\sigma_{33} + \\
&\quad + (M_{p2}M_{q3} + M_{p3}M_{q2})\sigma_{23} + (M_{p1}M_{q3} + M_{p3}M_{q1})\sigma_{13} + \\
&\quad + (M_{p1}M_{q2} + M_{p2}M_{q1})\sigma_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} & T_{1123} & T_{1113} & T_{1112} \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} & T_{2223} & T_{2213} & T_{2212} \\ T_{3311} & T_{3322} & T_{3333} & T_{3323} & T_{3313} & T_{3312} \\ T_{2311} & T_{2322} & T_{2333} & T_{2323} & T_{2313} & T_{2312} \\ T_{1311} & T_{1322} & T_{1333} & T_{1323} & T_{1313} & T_{1312} \\ T_{1211} & T_{1222} & T_{1233} & T_{1223} & T_{1213} & T_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.134)$$

$$T_{pqij} = \begin{cases} M_{pi} M_{qj} & (i = j) \\ M_{pi} M_{qj} + M_{pj} M_{qi} & (i < j) \end{cases} \qquad M_{pi} = \bar{\mathbf{e}}_p \cdot \mathbf{e}_i$$

A partir de la Ecuación (2.104), en condición plana de esfuerzos la relación de cambio de sistema coordenado se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.135)$$

Observación. *La matriz de transformación de sistema coordenado de las componentes de esfuerzo en notación de Voigt* $[\mathbf{T}]$ *no es ortogonal como otras matrices de transformación. Por lo tanto, las componentes de esfuerzo en el sistema coordenado original corresponden a* $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{T}]^{-1}\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}$.

2.17. Vector tracción en notación de Voigt

Las componentes del vector tracción que actúa en un plano de normal **n** están definidas en la Ecuación (2.11), de la forma:

$$\begin{aligned} t_1^{(n)} &= n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} \\ t_2^{(n)} &= n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32} \\ t_3^{(n)} &= n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33} \end{aligned} \qquad (2.136)$$

Por lo tanto, una matriz columna que contiene a las componentes del vector tracción $\{\mathbf{t}^{(n)}\}$ se puede expresar en notación de Voigt así:

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = [\mathbf{H}^{(n)}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

En particular para la condición plana de esfuerzos la ecuación anterior se simplifica de la forma:

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Ejemplo 2.5. Las componentes del tensor de esfuerzos con respecto a un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ sobre un punto cualquiera de una barra cilíndrica, cuyo eje longitudinal es x_3 como se muestra en la **Figura 2.23**, corresponde a:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m^2}$$

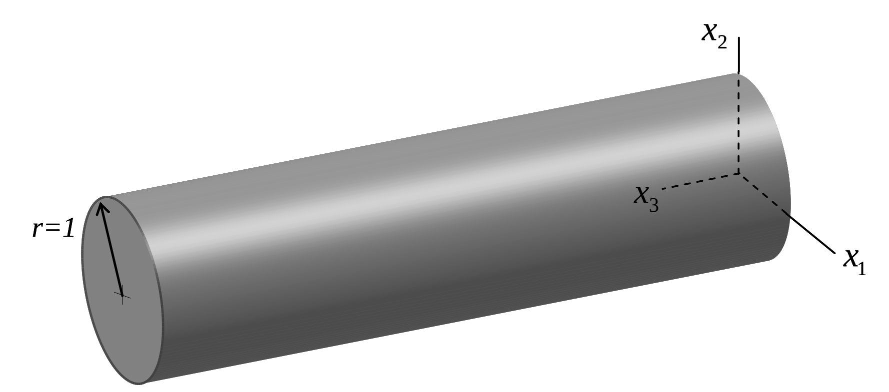


Figura 2.23. Sólido en forma de cilindro de eje x_3.

- Encontrar el vector tracción actuante sobre un plano que pasa por el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ y es tangente a la superficie del cilindro definida por la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- Calcular el esfuerzo normal a la superficie lateral del cilindro en el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$.
- Establecer la magnitud del esfuerzo máximo normal a la superficie lateral del cilindro, indicando su ubicación.
- Determinar los esfuerzos principales y las direcciones principales en la superficie lateral del cilindro.

Los puntos materiales ubicados sobre la superficie lateral del cilindro corresponden a todos los $(x_1, x_2, x_3) \forall\; x_1^2 + x_2^2 = 1$. Se observa en la **Figura 2.24(a)** que el punto *P* está ubicado en dicha superficie.

El vector normal a la superficie $x_1^2 + x_2^2 = 1$ está orientado en la dirección radial de tal círculo como se indica en la **Figura 2.24(b)**. Se define el vector unitario $\mathbf{n} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ como uno de los vectores normales a la superficie lateral del cilindro. Por lo tanto, el vector tracción, definido como $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, se puede calcular en notación matricial de la forma:

$$\left[\mathbf{t}^{(n)}\right] = [\boldsymbol{\sigma}]^T [\mathbf{n}]$$

$$\left[\mathbf{t}^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100x_1x_2 \\ 100x_1^2 \\ -100x_1x_2 \end{bmatrix}$$

es decir, $\mathbf{t}^{(n)} = 100\left(x_1x_2\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 - x_1x_2\mathbf{e}_3\right)$.

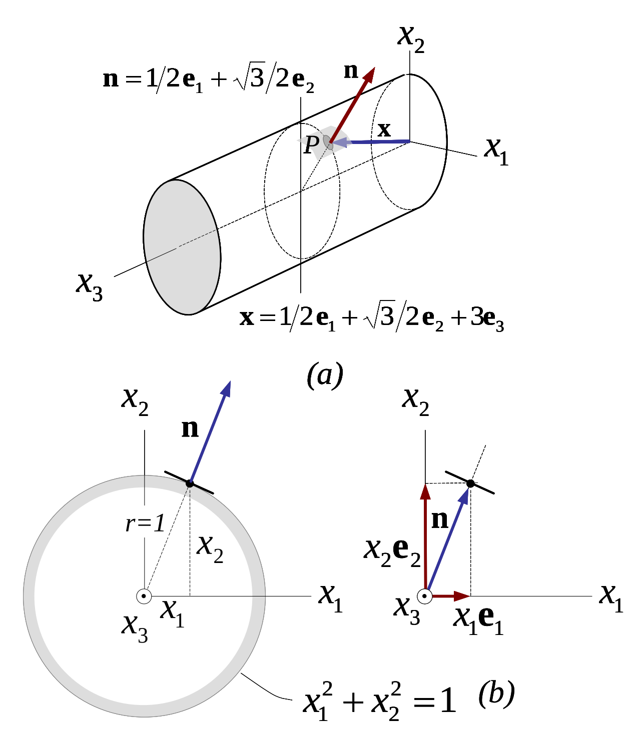


Figura 2.24. Sólido en forma de cilindro de eje x_3. Vector normal a la superficie lateral del cilindro.

Específicamente en el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$, el vector tracción actuando en la superficie de normal $\mathbf{n} = 1/2\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}/2\mathbf{e}_2$ será igual a:

$$[\mathbf{t}^{(n)}] = \begin{bmatrix} 0 & 50 & -50\sqrt{3} \\ 50 & 0 & 0 \\ -50\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\sqrt{3} \\ 25 \\ -25\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = 25\left(\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \sqrt{3}\mathbf{e}_3\right) \quad kN/m^2$$

La componente de esfuerzo normal es igual a $\sigma_N = \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n}$. En particular el esfuerzo normal a la superficie lateral del cilindro cuya normal $\mathbf{n} = 1/2\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}/2\mathbf{e}_2$, en el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ corresponde a:

$$\sigma_N = [\mathbf{n}]^T [\mathbf{t}^{(n)}]$$

$$\sigma_N = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25\sqrt{3} \\ 25 \\ -25\sqrt{3} \end{bmatrix} = 25\sqrt{3}\ kN/m^2$$

La magnitud de la componente de esfuerzo normal a la superficie lateral del cilindro es $\sigma_N = \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n}$, y se puede plantear en notación matricial de la forma:

$$\sigma_N = [\mathbf{n}]^T [\mathbf{t}^{(n)}]$$

$$\sigma_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100x_1x_2 \\ 100x_1^2 \\ -100x_1x_2 \end{bmatrix} = 200x_1^2x_2$$

Sustituyendo a $x_1^2 = 1 - x_2^2$ en la expresión anterior, dado que todo punto material sobre la superficie debe cumplir con la ecuación de la misma, se tiene que el esfuerzo normal es igual a:

$$\sigma_N = 200\left(x_2 - x_2^3\right)$$

Con el fin de establecer el valor máximo de σ_N se deriva la expresión anterior con respecto a la coordenada x_2 y se iguala a cero, de tal forma que:

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial x_2} = 200\left(1 - 3x_2^2\right) = 0 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_N}{\partial x_2^2} = -1200x_2 < 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_N(x_2 = \sqrt{1/3}) = \sigma_N^{\max} \\ \sigma_N(x_2 = -\sqrt{1/3}) = \sigma_N^{\min} \end{cases}$$

$$\sigma_N^{\max} = \frac{400\sqrt{3}}{9} = 76.98\,kN/m^2$$

Tal esfuerzo normal a la superficie lateral del cilindro adquiere su máximo valor en la posición:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\right) \quad m$$

Los esfuerzos principales $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$ son las raíces de la ecuación característica del tensor de esfuerzos

$\sigma_{(p)}^3 - I_1\sigma_{(p)}^2 + I_2\sigma_{(p)} - I_3 = 0$, donde los coeficientes I_1, I_2, I_3 son los invariantes de esfuerzos, que para este problema en particular son iguales a:

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$$
$$I_2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2\right\} = -10000\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$
$$I_3 = \det\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Por lo tanto en la ecuación cúbica se puede factorizar a $\sigma_{(p)}$ de tal forma que:

$$\sigma_{(p)}^3 - 10000\left(x_1^2 + x_2^2\right)\sigma_{(p)} = \sigma_{(p)}\left\{\sigma_{(p)}^2 - 10000\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right\} = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se establece que los esfuerzos principales en cualquier punto material son:

$$\sigma_{(1)}, \sigma_{(3)} = \pm 100\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \sigma_{(2)} = 0$$

Para los puntos materiales ubicados en la superficie lateral del cilindro los esfuerzos principales serán:

$$\sigma_{(1)} = 100\,kN/m^2 \quad \sigma_{(3)} = -100\,kN/m^2 \quad \sigma_{(2)} = 0$$

Las direcciones principales correspondientes con los anteriores esfuerzos principales se obtienen sustituyendo cada valor principal de esfuerzos en la expresión matricial:

$$\left([\boldsymbol{\sigma}] - \sigma_{(p)}[\mathbf{I}]\right)[\mathbf{n}]^{(p)} = [\mathbf{0}]$$

$$\begin{bmatrix} \left(0-\sigma_{(p)}\right) & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & \left(0-\sigma_{(p)}\right) & 0 \\ -100x_2 & 0 & \left(0-\sigma_{(p)}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(p)} \\ n_2^{(p)} \\ n_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el estado de esfuerzos del problema, y siendo $\sigma_{(p)} = \sigma_{(1)} = 100$, de la expresión anterior y de la definición de $\mathbf{n}$ como vector unitario, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -100\,n_1^{(1)} + 100x_1\,n_2^{(1)} - 100x_2\,n_3^{(1)} &= 0 \\ 100x_1 n_1^{(1)} - 100\,n_2^{(1)} &= 0 \\ -100x_2 n_1^{(1)} \qquad - 100\,n_3^{(1)} &= 0 \\ n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} &= 1 \end{aligned}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene el vector $\mathbf{n}^{(1)}$ que define la dirección principal asociada al esfuerzo principal $\sigma_{(1)}$, de la forma:

$$\mathbf{n}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 - x_2\mathbf{e}_3\right) \quad para\ \sigma_{(1)} = 100$$

La dirección principal del esfuerzo principal $\sigma_{(p)} = \sigma_{(2)} = 0$ está definida por el vector $\mathbf{n}^{(2)}$ cuyas componentes deben cumplir con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 100x_1\, n_2^{(2)} - 100x_2\, n_3^{(2)} &= 0 \\ 100x_1 n_1^{(2)} &= 0 \\ -100x_2 n_1^{(2)} &= 0 \\ n_1^{(2)2} + n_2^{(2)2} + n_3^{(2)2} &= 1 \end{aligned}$$

De la solución del sistema se encuentra el vector principal $\mathbf{n}^{(2)}$ de la forma:

$$\mathbf{n}^{(2)} = x_2\mathbf{e}_2 + x_1\mathbf{e}_3 \quad para\ \sigma_{(2)} = 0$$

De manera similar se calcula el vector $\mathbf{n}^{(3)}$ el cual define la dirección principal dada por el esfuerzo principal $\sigma_{(3)}$, obteniendo:

$$\mathbf{n}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_2 + x_2\mathbf{e}_3\right) \quad para\ \sigma_{(3)} = -100$$

Ejemplo 2.6. Una viga en voladizo con sección transversal rectangular y eje longitudinal x_3 está sometida a una carga puntual W ubicada en su extremo libre $x_3 = 0$ y actuando en la dirección $-x_2$ como lo ilustra la **Figura 2.25**. La matriz de componentes del tensor de esfuerzos con respecto a un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ para todo punto material $P(x_1, x_2, x_3)$ tal que $-a \le x_1 \le a$, $-h \le x_2 \le h$ y $0 \le x_3 \le l$, es de la forma:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A+Bx_2^2 \\ 0 & A+Bx_2^2 & Cx_2x_3 \end{bmatrix}\frac{kN}{m^2}$$

- Demostrar que el *estado de esfuerzos* cumple con las condiciones de equilibrio despreciando las fuerzas de cuerpo, indicando la relación entre las constantes *A*, *B* y *C*.
- Determinar la relación entre *A* y *B* cuando la tracción sobre las caras $x_2 = \pm h$ es nula.
- Expresar la fuerza resultante sobre el extremo libre $x_3 = 0$ en términos de *A*, *B* y *C*.

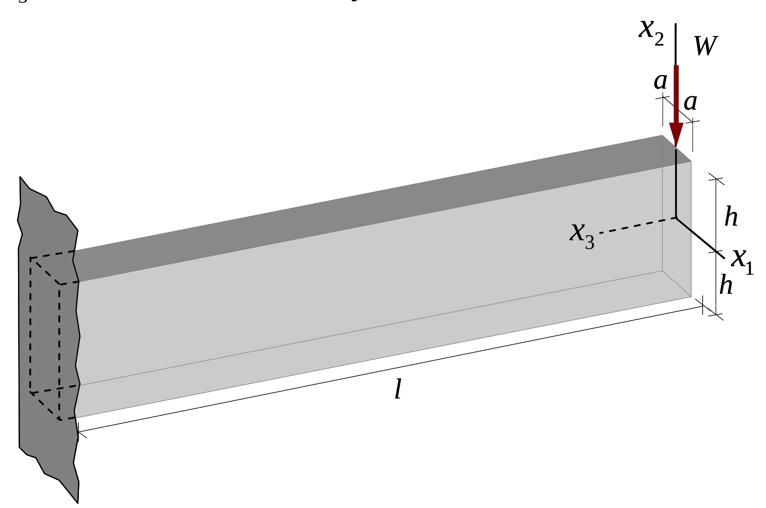


Figura 2.25. Viga en voladizo sometida a una carga puntual *W*.

Dada la ecuación de equilibrio local dada por la fuerza resultante de la forma $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0}$ y despreciando las fuerzas de cuerpo, es decir b=0, se puede verificar que:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho b_1=0+0+0+0=0 \;\lrcorner ok$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho b_2=0+0+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A+Bx_2^2\right)+0=0 \;\lrcorner ok$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=0+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(A+Bx_2^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(Cx_2x_3\right)+0$$
$$=\left(2B+C\right)x_2=0 \;\lrcorner ok\ si\ 2B+C=0$$

El vector tracción sobre la cara $x_2 = h$, cuyo vector normal es $\mathbf{n}=\mathbf{e}_2$, se obtiene de la siguiente operación tensorial

$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, la cual se expresa en notación matricial de la forma:

$$\left[\mathbf{t}^{(n)}\right] = [\boldsymbol{\sigma}]^T [\mathbf{n}]$$

$$\left[\mathbf{t}^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A + Bh^2 \\ 0 & A + Bh^2 & Chx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A + Bh^2 \end{bmatrix}$$

es decir, $\mathbf{t}^{(n)} = \left(A + Bh^2\right)\mathbf{e}_3$. Para la cara $x_2 = -h$ el vector tracción, considerando que su vector normal es $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$, es igual a $\mathbf{t}^{(n)} = -\left(A + Bh^2\right)\mathbf{e}_3$. Si el vector tracción es nulo,

$$A + Bh^2 = 0 \rightarrow A = -Bh^2$$

La componente de esfuerzo actuando sobre la cara $x_3 = 0$ paralela al eje x_2 es igual a $\sigma_{ns} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}$, siendo $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$. En consecuencia la componente σ_{ns} se calcula matricialmente de la forma:

$$\sigma_{ns} = [\mathbf{s}]^T [\boldsymbol{\sigma}]^T [\mathbf{n}]$$

$$\sigma_{ns} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A + Bx_2^2 \\ 0 & A + Bx_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -A - Bx_2^2$$

Dado que la fuerza puntual W es igual a la integral de la componente de esfuerzo calculada σ_{ns} en el área S de la cara $x_3 = 0$, es decir $W = \int \sigma_{ns} dS$, la magnitud de dicha fuerza será:

$$W = \int_{-h}^{+h}\int_{-a}^{+a} \sigma_{ns} dx_1 dx_2 = -\int_{-h}^{+h}\int_{-a}^{+a} \left(A + Bx_2^2\right) dx_1 dx_2 = -2a\left[Ax_2 + \frac{B}{3}x_2^3\right]_{-h}^{+h}$$

$$W = -4ah\left(A + \frac{Bh^2}{3}\right)$$

Capítulo 3
Descripción del movimiento y la deformación

En este capítulo se presentan los conceptos generales relacionados con el movimiento de las partículas como posición, punto material y espacial, configuración, coordenadas materiales y espaciales, descripción *lagrangeana* y *euleriana*, entre otras. Después se describe el desplazamiento y la deformación en un cuerpo, indicando diferentes medidas de deformación y profundizando específicamente en la deformación infinitesimal (Spencer 1990; Bonet & Wood 1997; Belytschko, Liu et al. 2000; Oliver & Agelet 2002; Reddy 2004; Wu 2005).

3.1. Conceptos básicos

A continuación se presentan algunos conceptos básicos de la mecánica del medio continuo indispensables para describir el movimiento y la deformación.

- El *vector posición* es aquel que determina la ubicación de un *punto* en el espacio y en el tiempo. Como todo vector, las componentes de la posición están referidas a un sistema coordenado específico.

- El *tiempo* es el sistema de medida de la secuencia de sucesos representado mediante una cantidad escalar. En general el instante de tiempo inicial es igual a cero y se denomina *tiempo de referencia* $t = 0$.

- *Punto espacial* se define como una posición fija en el espacio, es decir, invariante con respecto al tiempo. En cambio, *punto material* o *partícula* es un lugar en el espacio de posición relativa cambiante con el tiempo, relacionada con el movimiento de un cuerpo.

- *Cuerpo material* es el conjunto de partículas que ocupan posiciones diferentes en el espacio durante el movimiento a lo largo del tiempo.

- El lugar geométrico de las partículas de un cuerpo material con respecto a un sistema coordenado fijo en un instante de tiempo se define como *configuración* del cuerpo en ese instante. La configuración de un cuerpo en el instante de tiempo de referencia $t = 0$ se denomina *configuración material o de referencia* Ω_0. En cambio la *configuración actual en t* indicada como Ω_t corresponde a la configuración de un cuerpo en un instante de tiempo *t*. La **Figura 3.1** muestra las configuraciones actual y de referencia en un cuerpo.

- El *volumen material* se define como aquel volumen móvil conformado siempre por las mismas partículas, el cual es útil cuando las partículas conservan cierta proximidad durante el movimiento. En cambio, el *volumen de control* corresponde a un volumen fijo en el espacio que es atravesado por las partículas durante su movimiento y se utiliza cuando las partículas se dispersan con el movimiento.

3.2. Descripción del movimiento, coordenadas materiales y coordenadas espaciales

La posición de una partícula *P* de un cuerpo está definida con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ y en la configuración de referencia $(t = 0)$, como:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= X_i \mathbf{e}_i \\ &= X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde las componentes del vector posición X_1, X_2, X_3 se denominan *coordenadas materiales* de la partícula como lo indica la **Figura 3.1**.

En el instante de tiempo actual *t*, la partícula *P* ubicada en la posición $\mathbf{X}$ para $t = 0$ se traslada a la posición $\mathbf{x}$ en la configuración actual del cuerpo definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_i \mathbf{e}_i \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde las componentes del vector posición x_1, x_2, x_3 se denominan *coordenadas espaciales* de la partícula.

El *movimiento de una partícula* se establece como el cambio de posición de la misma en un periodo de tiempo, por lo tanto el movimiento de un punto material *P* ubicado en la posición $\mathbf{X}$ de coordenadas materiales X_1, X_2, X_3, se describe mediante la evolución en el tiempo del vector posición $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ cuyas componentes son las coordenadas espaciales x_1, x_2, x_3 (**Figura 3.1**).

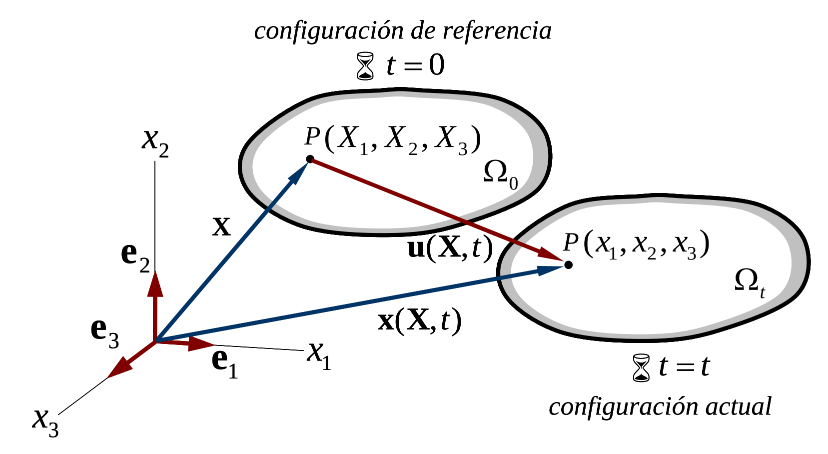


Figura 3.1. Configuración de referencia y configuración actual de un cuerpo.

En la configuración de referencia, es decir en el tiempo $t = 0$, se señala cada partícula mediante una etiqueta única que la identifica por su posición en coordenadas materiales.

El vector posición en coordenadas espaciales **x** se expresa mediante una función vectorial **f** en términos de las coordenadas materiales y del tiempo como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X},t) \quad x_1 = f_1(X_1, X_2, X_3, t) \quad x_2 = f_2(X_1, X_2, X_3, t) \quad x_3 = f_3(X_1, X_2, X_3, t) \tag{3.3}$$

Las componentes de la función **f**, es decir f_1, f_2, f_3, deben ser funciones biunívocas continuas e invertibles al igual que sus derivadas. La condición de unicidad asegura para un instante de tiempo, que dos partículas no ocupan el mismo lugar en el espacio y que una partícula no ocupa dos lugares diferentes en el espacio.

Las expresiones (3.3) definen a las coordenadas espaciales en función de las coordenadas materiales y se denominan *ecuaciones de movimiento*. Asimismo, el vector posición en coordenadas materiales se puede escribir en términos de las coordenadas espaciales mediante las *ecuaciones de movimiento inversas*, así:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x},t) \quad X_1 = f_1^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad X_2 = f_2^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad X_3 = f_3^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \tag{3.4}$$

siendo $\mathbf{f}^{-1}$ la función vectorial inversa de componentes $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}$. La condición matemática que garantiza la existencia de una función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ indica que el *determinante del Jacobiano* J debe ser diferente de cero, es decir:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0 \tag{3.5}$$

La ecuación de movimiento de una partícula específica P ubicada en la posición $\mathbf{X}^P$ dentro del cuerpo se denomina *trayectoria de la partícula* P y se ilustra en la **Figura 3.2**.

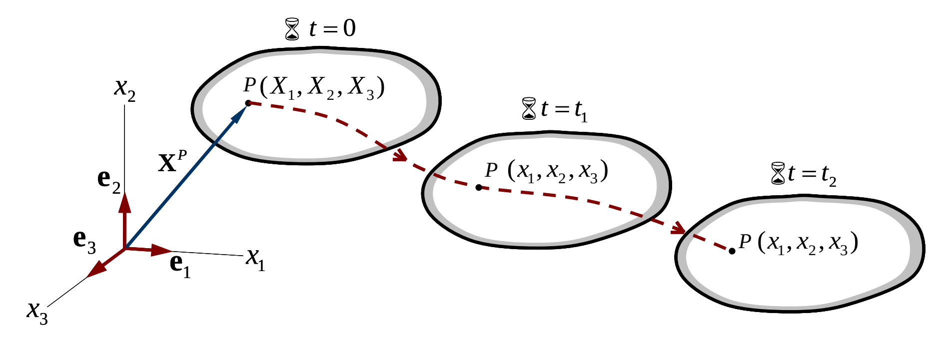


Figura 3.2. Trayectoria de una partícula *P* de un cuerpo.

La *velocidad* de una partícula ubicada en $\mathbf{X}^P$ a lo largo de su trayectoria es una cantidad vectorial que se define como la variación de su posición en el tiempo, es decir $\mathbf{v}(\mathbf{X}^P, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}^P, t)$. Por lo tanto, se puede establecer que el *campo de la velocidad* de un cuerpo es igual a:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \tag{3.6}$$

De manera similar, el campo de la *aceleración* de un cuerpo corresponde a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \tag{3.7}$$

3.3. Descripción material y descripción espacial

Los problemas en mecánica del medio continuo se pueden formular considerando como variables independientes las coordenadas materiales o las coordenadas espaciales, clasificándolos como se indica a continuación.

- Se emplea una *descripción material o lagrangeana* del problema cuando las variables independientes de las propiedades de las partículas son las coordenadas materiales X_1, X_2, X_3. Por lo tanto una propiedad cualquiera (escalar, vectorial o tensorial) de una partícula $\wp(\mathbf{X}, t)$ está definida en términos de su posición en la configuración de referencia **X** y del tiempo *t*. La descripción

material se utiliza para formular problemas de *Mecánica de Sólidos* en general.

- Se utiliza una *descripción espacial o euleriana* del problema cuando las variables independientes de las propiedades de las partículas son las coordenadas espaciales x_1, x_2, x_3. Por lo tanto una propiedad cualquiera de una partícula $\wp(\mathbf{x}, t)$ está definida en términos de su posición en la configuración actual **x** y del tiempo *t*. La descripción espacial se utiliza habitualmente para formular problemas de *Mecánica de Fluidos*.

Las dos descripciones se relacionan mediante las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de movimiento inversas.

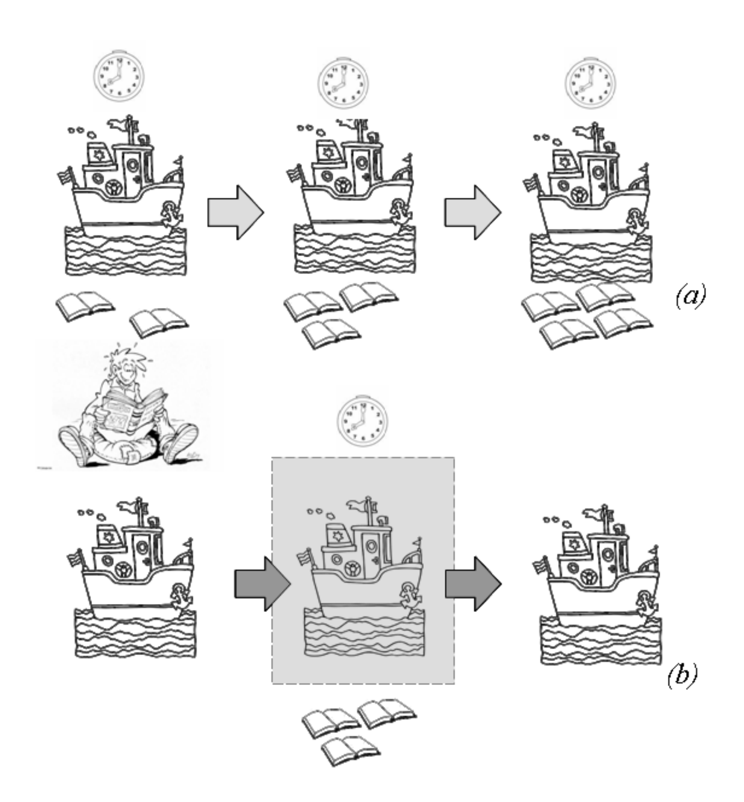


Figura 3.3. Analogía de la descripción empleada en problemas de mecánica del medio continuo: (a) descripción material y (b) descripción espacial.

Para explicar de manera informal la diferencia entre la descripción material y la descripción espacial de la propiedad de una partícula se realiza la siguiente analogía. El barco mostrado en la **Figura 3.3**, tiene abordo a un lector compulsivo que permanece leyendo libros en su litera durante todo el viaje.

Suponiendo que el barco representa una partícula y que el número de libros leídos es una propiedad de la misma, se puede imaginar que la cantidad de libros leídos en él hasta cierto instante de tiempo, corresponde a la descripción material de la propiedad de la partícula (**Figura 3.3(a)**). En cambio, la cantidad de libros leídos cuando el barco pasa por un punto específico del trayecto representa la descripción espacial de la misma propiedad (**Figura 3.3(b)**).

3.4. Campo del desplazamiento y de la velocidad

Se denomina *desplazamiento* de una partícula al cambio de posición de la misma entre la configuración de referencia y la configuración actual. Al igual que la posición, el desplazamiento es una cantidad vectorial, la cual está definida como la resta entre el vector posición en la configuración actual y el vector posición en la configuración de referencia. Como lo indica la **Figura 3.1**, el vector desplazamiento de un punto P ubicado en la posición $\mathbf{X}^P$ es igual a:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}^P, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}^P, t) - \mathbf{X}^P \tag{3.8}$$

El *campo del desplazamiento* de un cuerpo es una función que define el vector desplazamiento para cada partícula que lo conforma, en un instante de tiempo t. Empleando la descripción material para establecer el campo del desplazamiento se tiene:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \tag{3.9}$$

siendo Ω_0 el dominio del cuerpo en la configuración de referencia. Esta ecuación describe el desplazamiento que ocurrirá en una partícula cuya posición inicial es $\mathbf{X}$.

Asimismo, la descripción espacial del campo de desplazamiento corresponde a:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \tag{3.10}$$

siendo Ω_t el dominio del cuerpo en la configuración actual. Esta ecuación representa el desplazamiento que ocurre en una partícula actualmente ubicada en la posición **x**.

Recordando que las coordenadas materiales establecen la posición en la configuración de referencia, la cual es independiente del tiempo, se puede considerar a la variación del desplazamiento con respecto al tiempo como una definición alternativa de la *velocidad*, de la forma:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \tag{3.11}$$

3.5. Concepto y teorías de la deformación

En general un cuerpo en movimiento cambia en su posición, orientación, tamaño y forma. Si tal cuerpo cambia exclusivamente de posición y orientación se denomina *cuerpo rígido*, en cambio, si el cuerpo modifica su tamaño o su forma se denomina *cuerpo deformable*.

La *distorsión y* el *alargamiento*[1] o simplemente las *distorsiones* son los cambios de forma y de tamaño de un cuerpo después de aplicado un desplazamiento presentado entre la configuración de referencia o no deformada y la configuración actual o deformada. Las *distorsiones* están medidas en unidades de longitud.

La *deformación*[2] es la medida geométrica de las *distorsiones* que representa el desplazamiento relativo entre las partículas de un cuerpo, es decir, una medida de la cantidad de desplazamiento que difiere localmente del movimiento de cuerpo rígido. La *deformación* es una cantidad adimensional la cual se expresa habitualmente en porcentaje o fracciones decimales.

De acuerdo con la magnitud de la deformación, el análisis mecánico de sólidos se puede clasificar según las siguientes teorías:

- En la *teoría de deformación infinitesimal* o *teoría de pequeñas deformaciones* se considera que los desplazamientos, las rotaciones y las deformaciones de las partículas de un cuerpo son pequeñas. En este caso, la configuración actual es muy parecida

---

[1] Las palabras distorsión y alargamiento han sido traducidas del vocablo inglés *deformation*.

[2] La palabra deformación es la traducción del vocablo inglés *strain*.

a la configuración de referencia. Las deformaciones de los materiales más comunes en la construcción de obras civiles tales como el concreto y el acero se pueden considerar infinitesimales bajo condiciones de carga habituales.

- La *teoría de deformación finita o teoría de grandes deformaciones* establece que los desplazamientos, las rotaciones y las deformaciones son arbitrariamente grandes. En tal caso, la configuración actual de un cuerpo es sustancialmente diferente con respecto a su configuración de referencia. Algunos materiales descritos mediante la teoría de deformación finita son las gomas, los elastómeros y los tejidos biológicos suaves.

- La *teoría de grandes desplazamientos o teoría de grades rotaciones* considera que los desplazamientos y las rotaciones pueden ser grandes mientras las deformaciones son pequeñas.

3.6. Medidas de la deformación unidimensional

En general existen diferentes medidas de deformación representadas con tensores de segundo orden y asociadas a las teorías indicadas anteriormente. Sin embargo, para definir tales tensores de deformación es necesario establecer inicialmente las medidas de deformación unidimensional como se indica a continuación.

Suponiendo que la longitud de una *línea material* en un entorno diferencial es igual a L en la configuración de referencia y a l en la configuración actual como lo indica la **Figura 3.4**, se denomina *tasa de estiramiento* a:

$$\lambda = l/L \tag{3.12}$$

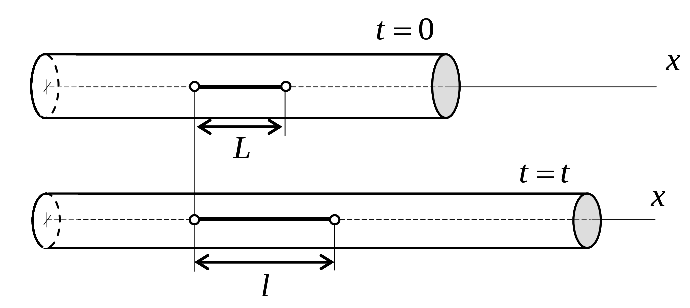


Figura 3.4. Línea material definida entre dos partículas de un cuerpo en un espacio unidimensional

Algunas de las medidas de deformación normal unidimensional más comunes son las siguientes:

- La forma más simple de medir la deformación normal unidimensional es calculando el estiramiento o alargamiento por unidad de longitud de la línea material en la configuración de referencia. Tal medida se denomina *deformación de Cauchy* o *deformación ingenieril* y está definida como:

$$\varepsilon_E = \frac{l - L}{L} = \lambda - 1 \tag{3.13}$$

- Una forma alternativa de medir grandes deformaciones consiste en sumar todos los pequeños incrementos de deformación $\Delta l / l$ que ocurren cuando la línea material se estira continuamente desde su longitud original *L* hasta su longitud en la configuración actual *l*. La denominada *deformación natural* o *deformación logarítmica* es el resultado del proceso de integración de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= \int_L^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{L} = \ln \lambda = \ln(\varepsilon_E + 1) \\ &= \varepsilon_E - \frac{\varepsilon_E^2}{2} + \frac{\varepsilon_E^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon_E^n}{n} \end{aligned} \tag{3.14}$$

  La deformación logarítmica escalar permite obtener la deformación en un espacio tridimensional, sin embargo tal proceso de generalización es complejo y computacionalmente costoso.

- Las medidas de deformación escalar más sencillas de generalizar en el medio continuo son las denominadas *deformación de Green* ε_G y *deformación de Almansi* ε_A, definidas como:

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \tag{3.15}$$

$$\varepsilon_A = \frac{l^2 - L^2}{2l^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{3.16}$$

La **Figura 3.5** compara a la *deformación ingenieril* con las demás medidas de deformación graficando las deformaciones en función de $\lambda - 1$.

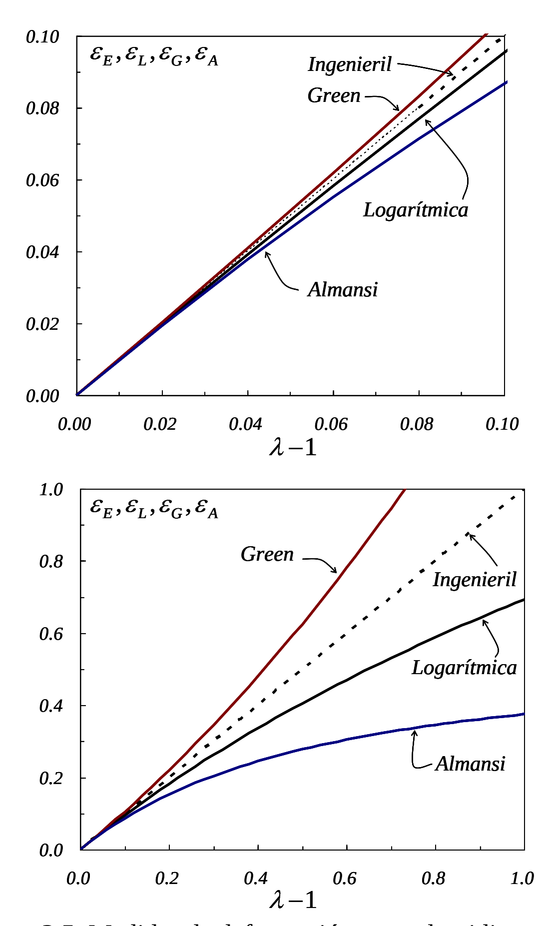


Figura 3.5. Medidas de deformación normal unidimensional

3.7. Tensor gradiente de deformación[3]

El segmento recto entre dos partículas de un cuerpo deformable denominado *línea material* aumenta o disminuye de longitud en el tiempo, lo cual no ocurre en un cuerpo rígido. Se considera una línea material que une dos partículas cercanas entre sí *P* y *Q* incluidas un espacio diferencial del cuerpo en la configuración de referencia, cuya longitud es *L* y está alineado con la dirección de un vector unitario $\bar{\mathbf{d}}$ como se ilustra en la **Figura 3.6**. Si *P* está ubicado en la posición $\mathbf{X}^P$, el punto material *Q* estará ubicado en la posición $\mathbf{X}^P + L\bar{\mathbf{d}}$. Para un tiempo *t* cambia la línea material entre los puntos *P* y *Q*, teniendo ahora una longitud *l* y un vector unitario direccional **d**. Si la nueva posición de la partícula *P* es $\mathbf{x}^P$, la partícula *Q* se trasladará a la posición $\mathbf{x}^P + l\mathbf{d}$.

El vector $\mathbf{x}^P$ indica la posición en la configuración actual de la partícula *P* que estaba ubicada en la posición $\mathbf{X}^P$ en la configuración de referencia, es decir:

$$\mathbf{x}^P = \mathbf{x}\left(\mathbf{X}^P, t\right) \tag{3.17}$$

Asimismo, el vector $\mathbf{x}^P + l\mathbf{d}$ indica la posición en la configuración actual de la partícula *Q* que estaba ubicada en la posición $\mathbf{X}^P + L\bar{\mathbf{d}}$ en la configuración de referencia, en otras palabras:

$$\mathbf{x}^P + l\mathbf{d} = \mathbf{x}\left(\mathbf{X}^P + L\bar{\mathbf{d}}, t\right) \tag{3.18}$$

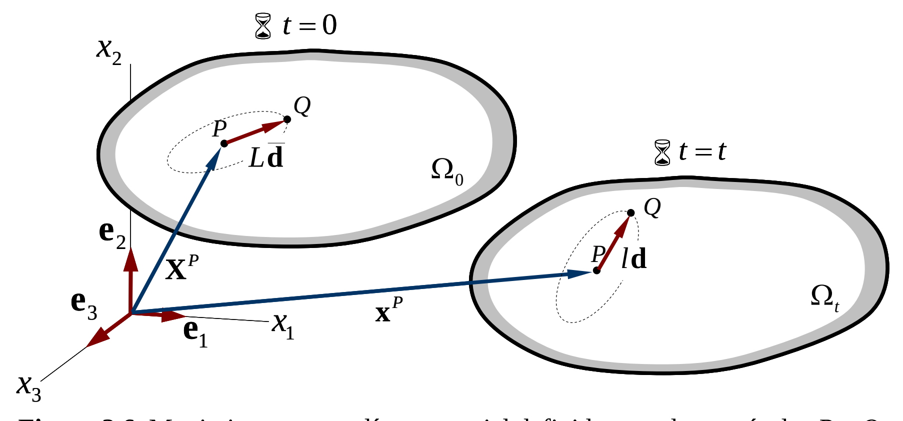


Figura 3.6. Movimiento en una línea material definida entre las partículas *P* y *Q*.

[3] A pesar de lo indicado en las notas anteriores, en español el tensor gradiente de deformación corresponde al vocablo inglés *deformation gradient tensor*.

Se recuerda que el *teorema de Taylor* aplicada a un campo vectorial establece que dada una función derivable **f** y siendo $\boldsymbol{\alpha}$ una posición cercana a **z**, la función definida en la posición **z** en notación indicial será aproximadamente igual a:

$$f_i(z_r) \cong f_i(\alpha_r) + (z_j - \alpha_j)\left.\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right|_{z_r=\alpha_r} + \\ + \frac{(z_j - \alpha_j)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2}\right|_{z_r=\alpha_r} + \ldots + \frac{(z_j - \alpha_j)^n}{n!}\left.\frac{\partial^n f_i}{\partial z_j^n}\right|_{z_r=\alpha_r} \tag{3.19}$$

Aplicando la ecuación anterior al campo vectorial $x_i\left(X_r^P + \bar{\delta}\,\bar{d}_r, t\right)$ en un tiempo fijo *t*, despreciando los términos de orden superior y considerando que $\alpha_j = X_j^P$ en virtud de que *Q* está muy cerca de *P*, se tiene:

$$x_i\left(X_r^P + L\bar{d}_r, t\right) = x_i\left(X_r^P, t\right) + L\bar{d}_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|_{(X_r, t)}$$

$$x_i^P + l d_i = x_i^P + L\bar{d}_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|_{(X_r, t)} \tag{3.20}$$

$$l d_i = L\bar{d}_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|_{(X_r, t)} \qquad \forall X_r \in \Omega_0$$

Por lo tanto para toda partícula que pertenece a la configuración material, es decir $X_j \in \Omega_0$ se concluye que:

$$l d_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} L\bar{d}_j \tag{3.21}$$

La última expresión denominada *ecuación fundamental de la deformación*, establece la relación entre la dirección y magnitud del vector definido por los puntos materiales *P* y *Q* en el instante actual $l\mathbf{d}$ y de referencia $L\bar{\mathbf{d}}$.

Los términos $\partial x_i / \partial X_j$ se denominan *gradientes materiales de deformación* porque describen el movimiento relativo de las partículas con respecto a las partículas circundantes en un entorno diferencial.

En un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ se define el vector de posición dado por las coordenadas espaciales de la forma $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ y el vector *operador nabla material* como:

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_i}\mathbf{e}_i \tag{3.22}$$

El tensor de segundo orden **F** obtenido del producto tensorial entre el vector posición **x** y el operador nabla material $\overline{\nabla}$ se denomina *tensor gradiente material de deformación* o simplemente *tensor gradiente de deformación*. Las componentes de dicho tensor F_{ij} corresponden a los términos $\partial x_i / \partial X_j$, por lo tanto **F** se puede expresar en notación compacta e indicial de la forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \overline{\nabla}$$
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{3.23}$$

La matriz de componentes de **F** con respecto al sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ es:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

De la ecuación anterior se observa que **F** no es un tensor simétrico en general.

La *ecuación fundamental de la deformación* indicada en la expresión (3.21) se puede escribir en función del tensor **F** de la forma:

$$l\mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot L\overline{\mathbf{d}}$$
$$l d_i = F_{ij} L \overline{d}_j \tag{3.25}$$

> ***Observación***. *A pesar de su importancia en el análisis de deformaciones, el tensor **F** no es una medida de la deformación, dado que toda medida de deformación debe permanecer sin cambios en el movimiento de un cuerpo rígido.*

Si las componentes del tensor $\partial x_i / \partial X_j$ se multiplican por $\partial X_j / \partial x_i$ el resultado corresponde al tensor unidad de segundo orden, es decir:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$$
$$F_{ij}F_{jk}^{-1} = \delta_{ik} \tag{3.26}$$

por lo tanto, se define a los términos $\partial X_j / \partial x_i$ como las componentes del *tensor gradiente de deformación inverso* o *tensor gradiente espacial de deformación* $\mathbf{F}^{-1}$.

En un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ se define el vector de posición dado por las coordenadas materiales de la forma $\mathbf{X} = X_i\mathbf{e}_i$ y el vector *operador nabla espacial* como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \tag{3.27}$$

Por lo tanto el tensor gradiente de deformación inverso será igual a:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \nabla$$
$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \tag{3.28}$$

En notación matricial las componentes de dicho tensor se ordenan en una matriz cuadrada de tercer orden de la forma:

$$\left[\mathbf{F}^{-1}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

3.8. Tensor de deformación

Sean P y Q partículas en un entorno diferencial de un cuerpo como lo indica la **Figura 3.6**, la relación entre la configuración de referencia y la configuración actual del vector definido por las dos partículas corresponde a:

$$l\mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot L\bar{\mathbf{d}} \quad , \quad L\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot l\mathbf{d}$$
$$ld_i = LF_{ij}\bar{d}_j \quad , \quad L\bar{d}_i = F_{ij}^{-1} l d_j \tag{3.30}$$

recordando que **F** es el tensor gradiente de deformación explicado en el apartado anterior.

La longitud al cuadrado de la línea material *PQ* en el instante de tiempo *t* obtenida como el producto interno del vector $l\mathbf{d}$ con el mismo, es igual a:

$$l^2 = \left\| l\mathbf{d} \right\|^2 = l\mathbf{d} \cdot l\mathbf{d}$$
$$l^2 = L^2 F_{ij}\bar{d}_j F_{ik}\bar{d}_k = L^2 \bar{d}_j F_{ji}^T F_{ik}\bar{d}_k \tag{3.31}$$
$$l^2 = L^2 \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{d}} = L^2 \bar{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{d}}$$

siendo $\tilde{\mathbf{C}}$ el *tensor de deformación de Cauchy-Green derecho*, el cual corresponde a $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Se recuerda que la *tasa de estiramiento* es el cociente entre la longitud final y la inicial de una línea material infinitesimal que está orientada en la dirección dada por el vector **d** en la configuración actual y por $\bar{\mathbf{d}}$ en la configuración referencia, es decir $\lambda = l/L$. Expresando la ecuación anterior en función de λ^2 se obtiene la *descripción material de la tasa de estiramiento* así:

$$\lambda^2 = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{d}}$$
$$\lambda^2 = \bar{d}_i \bar{d}_j \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \bar{d}_i \tilde{C}_{ij} \bar{d}_j \tag{3.32}$$

La variación en las longitudes al cuadrado de la línea material *PQ* entre la configuración actual y la configuración de referencia se puede escribir en términos de las coordenadas materiales como:

$$l^2 - L^2 = L^2 \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{1} \right) \cdot \bar{\mathbf{d}} \tag{3.33}$$

Si se divide entre $2L^2$ en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene la medida de deformación denominada *deformación escalar de Green* y presentada en la Ecuación (3.15) como:

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{d}} \tag{3.34}$$

donde $\bar{\mathbf{E}}$ se denomina *tensor material de deformación* o *tensor deformación de Green* y se define en notación compacta e indicial como:

$$\overline{\mathbf{E}} = \tfrac{1}{2}\left(\widetilde{\mathbf{C}} - \mathbf{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}\right) \tag{3.35}$$

$$\overline{E}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\widetilde{C}_{ij} - \delta_{ij}\right) = \tfrac{1}{2}\left(F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}\right) \tag{3.36}$$

Se recuerda que el vector $\overline{\mathbf{d}}$ indicado en la Ecuación (3.34) es un vector unitario que establece la dirección de la línea material *PQ* en la configuración de referencia.

Sustituyendo la relación $(l/L)^2$ en la Ecuación (3.34) se obtiene una expresión de la tasa de estiramiento en términos del tensor de deformación de Green de la forma:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) &= \overline{\mathbf{d}} \cdot \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{d}} \\ \lambda^2 &= 2\overline{\mathbf{d}} \cdot \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{d}} + 1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Se puede demostrar que el tensor $\overline{\mathbf{E}}$ es simétrico evaluando el tensor transpuesto de la forma:

$$\overline{\mathbf{E}}^T = \tfrac{1}{2}\left(\widetilde{\mathbf{C}}^T - \mathbf{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T \cdot \left(\mathbf{F}^T\right)^T - \mathbf{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}\right) = \overline{\mathbf{E}}$$

Por otro lado, la longitud al cuadrado de la línea material *PQ* en la configuración de referencia L^2 será igual a:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left\| L\overline{\mathbf{d}} \right\|^2 = L\overline{\mathbf{d}} \cdot L\overline{\mathbf{d}} \\ L^2 &= l^2 F_{ij}^{-1} d_j F_{ik}^{-1} d_k = l^2 d_j F_{ji}^{-T} F_{ik}^{-1} d_k \\ L^2 &= l^2 \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} = l^2 \mathbf{d} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \tag{3.38}$$

siendo $\mathbf{F}^{-T}$ el tensor transpuesto del tensor gradiente de deformación inverso, es decir $\mathbf{F}^{-T} = \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T$. El *tensor de deformación de Cauchy-Green izquierdo* está definido como $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$, por lo tanto $\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}$.

La tasa de estiramiento también se puede expresar en términos del vector direccional de la línea material en la configuración actual **d**, reemplazando a $\lambda = l/L$ en la ecuación anterior de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} \\ \frac{1}{\lambda^2} &= d_i d_j \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{3.39}$$

La variación en las longitudes al cuadrado de la línea material *PQ* entre la configuración actual y la configuración de referencia se puede escribir en términos de las coordenadas espaciales como:

$$l^2 - L^2 = l^2 \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\right) \cdot \mathbf{d} \tag{3.40}$$

Si ahora se divide entre $2l^2$ en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene la medida de deformación denominada *deformación escalar de Almansi* y presentada en la Ecuación (3.16) como:

$$\varepsilon_A = \frac{l^2 - L^2}{2l^2} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \tag{3.41}$$

donde **E** se denomina *tensor de espacial de deformación* o *tensor deformación de Almansi* y se define en notación compacta e indicial como:

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}\right) \tag{3.42}$$

$$E_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \tilde{B}_{ij}^{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\delta_{ij} - F_{ki}^{-1} F_{kj}^{-1}\right) \tag{3.43}$$

Se recuerda que el vector **d** indicado en la Ecuación (3.41) es un vector unitario que establece la dirección de la línea material *PQ* en la configuración actual.

Sustituyendo la relación $(l/L)^2$ en la Ecuación (3.41) se obtiene una expresión de la tasa de estiramiento en términos del tensor de deformación de Almansi de la forma:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda^{-2}\right) &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \\ \lambda^{-2} &= 1 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Se puede demostrar que el tensor **E** es simétrico evaluando el tensor transpuesto de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^T &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\right)^T = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}^{-T}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \cdot \left(\mathbf{F}^{-T}\right)^T\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}\right) = \mathbf{E} \end{aligned}$$

Los coeficientes de los tensores de deformación de Green y de Almansi son cantidades adimensionales que pueden describir el campo de la deformación de un cuerpo considerando *deformación finita*.

Ejemplo 3.1. Dadas las siguientes ecuaciones de movimiento de un cuerpo cuando se deforma, calcular la dirección de una línea material en la configuración actual **d**, la cual es paralela al vector $\bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ en la configuración de referencia. Encontrar la tasa de estiramiento de dicha línea y sus medidas de deformación longitudinal de Cauchy, logarítmica, de Green y de Almansi.

$$x_1 = \sqrt{2}X_1 + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}X_2$$
$$x_2 = -X_1 + \tfrac{3}{4}X_2 + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}X_3$$
$$x_3 = X_1 - \tfrac{3}{4}X_2 + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}X_3$$

La relación entre el vector unitario que define la dirección de una línea material en la configuración actual **d** y en la configuración de referencia $\bar{\mathbf{d}}$ es de la forma $\lambda\mathbf{d} = \mathbf{F}\cdot\bar{\mathbf{d}}$ en notación compacta y $\lambda[\mathbf{d}] = [\mathbf{F}][\bar{\mathbf{d}}]$ en notación matricial, siendo λ la tasa de estiramiento de la línea y **F** el tensor gradiente de deformación. Las componentes de este último están dadas como $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ y se pueden presentar en una matriz cuadrada de la forma:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \tfrac{3}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \\ 1 & -\tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

La tasa de estiramiento multiplicada por el vector unitario que define la dirección de la línea material en la configuración actual es igual a:

$$\lambda[\mathbf{d}] = [\mathbf{F}][\bar{\mathbf{d}}]$$
$$\lambda\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \tfrac{3}{4}\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \\ 1 & -\tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Siendo **d** un vector unitario, la norma del vector $\lambda\mathbf{d}$ es la tasa de estiramiento:

$$\lambda = \|\lambda\mathbf{d}\| = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left((7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{13}{6}}$$

Las componentes del vector **d** se obtienen de la forma:

$$\mathbf{d} = \frac{\lambda \mathbf{d}}{\|\lambda \mathbf{d}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

Las medidas de deformación escalar de Cauchy ε_E, logarítmica ε_L, de Green ε_G y de Almansi ε_A están definidas como:

$$\varepsilon_E = \lambda - 1 \quad , \quad \varepsilon_L = \ln(\lambda)$$
$$\varepsilon_G = \tfrac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \quad , \quad \varepsilon_A = \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda^{-2}\right)$$

A partir de la tasa de estiramiento obtenida anteriormente se tiene que:

$$\varepsilon_E = \sqrt{\frac{13}{6}} - 1 = 0.4720$$
$$\varepsilon_L = \ln\left(\sqrt{\frac{13}{6}}\right) = 0.3866$$
$$\varepsilon_G = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} - 1\right) = \frac{7}{12} = 0.5833$$
$$\varepsilon_A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6}{13}\right) = \frac{7}{26} = 0.2692$$

3.9. Tensor de deformación en función del tensor gradiente de desplazamiento

Como se indicó en el Apartado 3.4, el campo vectorial del desplazamiento en un cuerpo es descrito de forma material como $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}$. El *tensor gradiente material de desplazamiento* $\bar{\mathbf{J}}$ será igual al producto tensorial entre el vector $\bar{\mathbf{u}}$ y el operador nabla material $\bar{\nabla}$, de tal forma que sus componentes corresponden a las derivadas de las componentes del vector desplazamiento con respecto a las coordenadas materiales. En notación compacta se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X},t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t)\otimes\bar{\nabla} \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{X},t)\otimes\bar{\nabla} - \mathbf{X}\otimes\bar{\nabla} = \mathbf{F}-\mathbf{1}\end{aligned} \tag{3.45}$$

y en notación indicial las componentes corresponden a:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{ij}(X_r,t) &= \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij}\end{aligned} \tag{3.46}$$

Los coeficientes del tensor gradiente material de desplazamiento son cantidades adimensionales que corresponden a las derivadas de las componentes de desplazamiento con respecto a las coordenadas materiales.

Por lo tanto una forma alternativa de expresar el tensor gradiente de deformación en términos del tensor gradiente material del desplazamiento $\bar{\mathbf{J}}$ es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \bar{\mathbf{J}} \tag{3.47}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (3.35) se obtiene el tensor de deformación de Green $\bar{\mathbf{E}}$ en notación compacta e indicial de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \tfrac{1}{2}\left((\mathbf{1}+\bar{\mathbf{J}})^T\cdot(\mathbf{1}+\bar{\mathbf{J}}) - \mathbf{1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1} + \mathbf{1}\cdot\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\cdot\mathbf{1} + \bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{J}} - \mathbf{1}\right) \\ \bar{\mathbf{E}} &= \tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T + \bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{J}}\right)\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_i}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_j}\right) \tag{3.49}$$

Dado el campo vectorial de desplazamientos descrito de forma espacial como $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ y el operador nabla espacial ∇, el *tensor gradiente espacial de desplazamiento* estará definido en notación compacta como:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\otimes\nabla \\ &= \mathbf{x}\otimes\nabla - \mathbf{X}(\mathbf{x},t)\otimes\nabla = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1}\end{aligned} \tag{3.50}$$

En notación indicial las componentes de **J** corresponden a:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x_r,t) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F_{ij}^{-1} \end{aligned} \tag{3.51}$$

De acuerdo con lo anterior el tensor gradiente de deformación inverso $\mathbf{F}^{-1}$ se puede escribir como $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{J}$. Al sustituir dicha expresión en la Ecuación (3.42) se obtiene el tensor de deformación de Almansi **E** en términos del tensor gradiente espacial de desplazamiento **J,** expresado en notación compacta de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - (\mathbf{1}-\mathbf{J})^T \cdot (\mathbf{1}-\mathbf{J})\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathbf{1}\cdot\mathbf{1} + \mathbf{1}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\cdot\mathbf{1} - \mathbf{J}^T\cdot\mathbf{J}\right) \\ \mathbf{E} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T - \mathbf{J}^T\cdot\mathbf{J}\right) \end{aligned} \tag{3.52}$$

y en notación indicial como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{3.53}$$

Ejemplo 3.2. Dadas las siguientes ecuaciones de movimiento de un cuerpo, calcular el tensor de deformaciones de Green y de Almansi. Comparar los tensores de deformación cuando la constante A adquiere un valor muy pequeño.

$$x_1 = X_1 + AX_2 \quad , \quad x_2 = X_2 + AX_3 \quad , \quad x_3 = X_3 + AX_1$$

Las componentes del campo vectorial del desplazamiento en descripción material $\bar{u}_i = x_i(X_r) - X_i$, corresponden a:

$$\bar{u}_1 = AX_2 \quad , \quad \bar{u}_2 = AX_3 \quad , \quad \bar{u}_3 = AX_1$$

Por lo tanto, el gradiente de desplazamiento en descripción material $\bar{J}_{ij} = \partial \bar{u}_i / \partial X_j$ se puede escribir en notación matricial de la forma:

$$[\bar{\mathbf{J}}] = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las componentes del tensor de deformación de Green se obtienen de la forma:

$$\left[\overline{\mathbf{E}}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\left[\overline{\mathbf{J}}\right] + \left[\overline{\mathbf{J}}\right]^T + \left[\overline{\mathbf{J}}\right]^T\left[\overline{\mathbf{J}}\right]\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\left[\overline{\mathbf{E}}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} A^2 & A & A \\ A & A^2 & A \\ A & A & A^2 \end{bmatrix}$$

Para calcular el tensor de deformación de Almansi es necesario escribir las ecuaciones de movimiento inversas. A partir de las ecuaciones de movimiento, se despejan las coordenadas materiales en función de las espaciales, obteniendo:

$$X_1 = \frac{1}{1+A^3}\left(x_1 - Ax_2 + A^2x_3\right)$$
$$X_2 = \frac{1}{1+A^3}\left(A^2x_1 + x_2 - Ax_3\right)$$
$$X_3 = \frac{1}{1+A^3}\left(-Ax_1 + A^2x_2 + x_3\right)$$

De las expresiones anteriores se evalúa el campo de desplazamientos en descripción espacial $u_i = x_i - X_i\left(x_r\right)$, como:

$$u_1 = \frac{A}{1+A^3}\left(A^2x_1 + x_2 - Ax_3\right)$$
$$u_2 = \frac{A}{1+A^3}\left(-Ax_1 + A^2x_2 + x_3\right)$$
$$u_3 = \frac{A}{1+A^3}\left(x_1 - Ax_2 + A^2x_3\right)$$

Por lo tanto, el gradiente de desplazamiento en descripción espacial $J_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ se puede escribir en notación matricial de la forma:

$$[\mathbf{J}]=\frac{1}{1+A^3}\begin{bmatrix} A^3 & A & -A^2 \\ -A^2 & A^3 & A \\ A & -A^2 & A^3 \end{bmatrix}$$

Las componentes del tensor de deformación de Almansi se obtienen de la forma:

$$[\mathbf{E}]=\tfrac{1}{2}\left([\mathbf{J}]+[\mathbf{J}]^T-[\mathbf{J}]^T[\mathbf{J}]\right)$$

$$=\frac{1}{2(1+A^3)}\begin{bmatrix} A^3 & A & -A^2 \\ -A^2 & A^3 & A \\ A & -A^2 & A^3 \end{bmatrix}+\frac{1}{2(1+A^3)}\begin{bmatrix} A^3 & -A^2 & A \\ A & A^3 & -A^2 \\ -A^2 & A & A^3 \end{bmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2(1+A^3)^2}\begin{bmatrix} (A^6+A^4+A^2) & (-A^5+A^4-A^3) & (-A^5+A^4-A^3) \\ (-A^5+A^4-A^3) & (A^6+A^4+A^2) & (-A^5+A^4-A^3) \\ (-A^5+A^4-A^3) & (-A^5+A^4-A^3) & (A^6+A^4+A^2) \end{bmatrix}$$

Considerando que A es un valor constante muy pequeño se pueden despreciar los términos de orden superior como $A^2, A^3, A^4, \ldots$ de tal manera que:

$$[\overline{\mathbf{E}}]\cong[\mathbf{E}]\cong\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{bmatrix}$$

3.10. Tensor de deformación infinitesimal

Bajo condiciones de carga típicas muchos materiales experimentan pequeños cambios de forma y tamaño como por ejemplo el concreto, el acero y la madera. En tal caso, las medidas de deformación de *Green* y de *Almansi*, útiles para describir *deformación finita*, se pueden aproximar a la *deformación infinitesimal*.

3.10.1. Obtención del tensor de deformación infinitesimal

Siendo el vector desplazamiento $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}$, el tensor gradiente espacial del desplazamiento es igual a $\mathbf{J}=\mathbf{1}-\mathbf{F}^{-1}$ como lo indica la Ecuación (3.50), lo cual también se puede expresar de la forma

$\mathbf{J} = \mathbf{1} - \{\mathbf{1} + (\mathbf{F} - \mathbf{1})\}^{-1}$. Aplicando una *expansión binomial* del término $\{\mathbf{1} + (\mathbf{F} - \mathbf{1})\}^{-1}$ de la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{1} + (\mathbf{F} - \mathbf{1})\}^{-1} &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (\mathbf{F} - \mathbf{1})^r \\ &= \mathbf{1} - (\mathbf{F} - \mathbf{1}) + (\mathbf{F} - \mathbf{1})^2 - (\mathbf{F} - \mathbf{1})^3 + \ldots + (-1)^n (\mathbf{F} - \mathbf{1})^n \end{aligned} \tag{3.54}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{1} - \{\mathbf{1} + (\mathbf{F} - \mathbf{1})\}^{-1} &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (\mathbf{F} - \mathbf{1})^{r+1} \\ &= (\mathbf{F} - \mathbf{1}) - (\mathbf{F} - \mathbf{1})^2 + (\mathbf{F} - \mathbf{1})^3 - \ldots + (-1)^n (\mathbf{F} - \mathbf{1})^{n+1} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Recordando que el factor $\mathbf{F} - \mathbf{1}$ es igual al tensor gradiente material de desplazamiento como lo indica la Ecuación (3.45), la expresión anterior será:

$$\mathbf{J} = \bar{\mathbf{J}} - \bar{\mathbf{J}}^2 + \bar{\mathbf{J}}^3 - \ldots + (-1)^n \bar{\mathbf{J}}^{n+1} \tag{3.56}$$

por lo tanto las componentes del gradiente de desplazamiento en descripción espacial y notación indicial corresponden a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_k}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_k}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_r}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial X_j} - \ldots \tag{3.57}$$

Suponiendo que todas las componentes del tensor gradiente material de desplazamiento son pequeñas comparadas con el valor 1, es decir,

$$\bar{J}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} << 1 \tag{3.58}$$

se pueden despreciar los términos de orden superior como los productos indicados en la parte derecha de la Ecuación (3.57), concluyendo que:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cong \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} \quad ; \quad \mathbf{J} \cong \bar{\mathbf{J}} \tag{3.59}$$

Lo cual significa que los gradientes material y espacial del desplazamiento coinciden. Sustituyendo el resultado anterior en las Ecuaciones (3.49) y (3.53) y de nuevo despreciando los términos de orden superior $\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{J}}$, se establece que:

$$\bar{\mathbf{E}} \cong \mathbf{E} \cong \tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cong \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right)$$
$$\bar{E}_{ij} \cong E_{ij} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial X_i}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.60}$$

Lo cual indica que los tensores de deformación de Green y de Almansi son aproximadamente iguales cuando las componentes del tensor gradiente material de desplazamiento son pequeñas comparadas con la unidad. El tensor obtenido de la aproximación se denomina *tensor de deformación infinitesimal* en concordancia con la *teoría de deformación infinitesimal*, la cual establece como hipótesis básica que las deformaciones son pequeñas. El tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ se expresa en descripción material de forma compacta e indicial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \tag{3.61}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial X_i}\right) \tag{3.62}$$

De acuerdo con la Ecuación (1.109), $\boldsymbol{\varepsilon}$ también puede escribirse como el *gradiente simétrico* de la descripción material del vector desplazamiento $\bar{\mathbf{u}}$, de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\nabla} + \bar{\nabla} \otimes \bar{\mathbf{u}}\right) = \bar{\nabla}^s \bar{\mathbf{u}} \tag{3.63}$$

Observación. *De acuerdo con el Apartado 1.6.4 todo tensor de segundo orden de la forma dada por el tensor de deformación infinitesimal* $\tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right)$ *es simétrico.*

La matriz de componentes de dicho tensor simétrico de segundo orden con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ es la siguiente:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

donde los términos en función de los gradientes materiales del desplazamiento son:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \overline{u}_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_1}{\partial X_2}+\dfrac{\partial \overline{u}_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_1}{\partial X_3}+\dfrac{\partial \overline{u}_3}{\partial X_1}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_2}{\partial X_1}+\dfrac{\partial \overline{u}_1}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial \overline{u}_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_2}{\partial X_3}+\dfrac{\partial \overline{u}_3}{\partial X_2}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_3}{\partial X_1}+\dfrac{\partial \overline{u}_1}{\partial X_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \overline{u}_3}{\partial X_2}+\dfrac{\partial \overline{u}_2}{\partial X_3}\right) & \dfrac{\partial \overline{u}_3}{\partial X_3}\end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Dada la igualdad entre el tensor de Green y de Almansi bajo las hipótesis de la teoría de deformación infinitesimal, el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede expresar en descripción espacial de forma compacta e indicial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T\right) \tag{3.66}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.67}$$

El tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ también puede escribirse en términos del *gradiente simétrico* de la descripción espacial del vector de desplazamiento **u**, de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}\right)=\nabla^s\mathbf{u} \tag{3.68}$$

La matriz de componentes de dicho tensor simétrico de segundo orden con respecto a un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ en función de los gradientes espaciales del desplazamiento es la siguiente:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix} \tag{3.69}$$

3.10.2. Limitaciones del tensor de deformación infinitesimal. Rotación de un cuerpo rígido

El tensor de deformación infinitesimal no puede ser una medida exacta de la deformación debido a que no permanece constante durante la *rotación de un cuerpo rígido*.

Sea P una partícula de un cuerpo que rota un ángulo α con respecto al eje coordenado x_3 como lo ilustra la **Figura 3.7**, las coordenadas materiales y espaciales de la partícula son:

$$X_1 = r\cos\theta_0 \quad X_2 = r\sin\theta_0 \quad X_3 = 0$$
$$x_1 = r\cos(\theta_0+\alpha) \quad x_2 = r\sin(\theta_0+\alpha) \quad x_3 = 0$$

Aplicando las identidades trigonométricas,

$$\sin(\theta_0+\alpha) = \sin\theta_0\cos\alpha + \cos\theta_0\sin\alpha$$

$$\cos(\theta_0+\alpha) = \cos\theta_0\sin\alpha - \sin\theta_0\cos\alpha$$

se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1\cos\alpha - X_2\sin\alpha \\ x_2 &= X_1\sin\alpha + X_2\cos\alpha \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \tag{3.70}$$

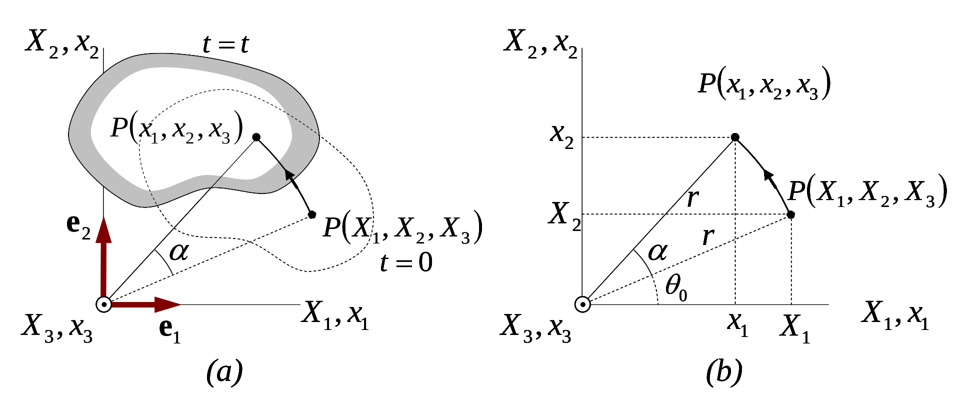


Figura 3.7. Rotación de un cuerpo rígido: (a) esquema general, (b) coordenadas materiales y espaciales de una partícula P.

De acuerdo con las expresiones anteriores y con la Ecuación (3.10), la descripción material de las componentes del campo vectorial de desplazamientos será:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= X_1 \cos\alpha - X_2 \sin\alpha - X_1 \\ \bar{u}_2 &= X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha - X_2 \\ \bar{u}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Después de calcular las derivadas de las componentes de desplazamiento con respecto a las coordenadas materiales se obtiene la matriz de componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ indicada a continuación.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Los términos ε_{11} y ε_{22} son diferentes de cero pero pueden considerarse despreciables para gradientes de desplazamiento pequeños.

***Observación**. A pesar que el tensor de deformación infinitesimal no sea una medida exacta de la deformación, ofrece una excelente aproximación. Comúnmente en materiales estructurales las componentes ε_{ij} son menores a 0.01, lo cual concuerda con la suposición de que los gradientes del desplazamiento son pequeños comparados con 1. La ventaja de utilizar el tensor de deformación infinitesimal radica en que sus componentes varían linealmente con respecto al gradiente del desplazamiento, lo cual plantea un problema lineal (siempre y cuando no existan otras fuentes de no linealidad). La ley de Hooke considera este tipo de aproximación del campo de la deformación con resultados satisfactorios en muchas aplicaciones.*

3.11. Interpretación geométrica de la deformación infinitesimal

3.11.1. Estiramiento unitario

La descripción material de la tasa de estiramiento indicada en la Ecuación (3.32), se puede escribir sustituyendo el tensor gradiente de deformación **F** dado en la Ecuación (3.47) por el tensor gradiente material de desplazamiento $\bar{\mathbf{J}}$ de la forma:

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{J}}\right)^T \cdot \left(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{J}}\right) \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T \cdot \mathbf{1} + \bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{J}}\right) \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= 1 + \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T + \bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{J}}\right) \cdot \bar{\mathbf{d}}\end{aligned} \tag{3.73}$$

Despreciando los términos de segundo orden del gradiente material del desplazamiento, es decir, $\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{J}} \cong 0$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\lambda = \sqrt{1 + \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cdot \bar{\mathbf{d}}} \tag{3.74}$$

La *expansión binomial* de una función de la forma $\sqrt{1+\varsigma}$ corresponde a la siguiente serie:

$$\sqrt{1+\varsigma} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)k!^2 4^k} \varsigma^k = 1 + \tfrac{1}{2}\varsigma - \tfrac{1}{8}\varsigma^2 \ldots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n} \varsigma^n \tag{3.75}$$

por lo tanto la tasa de estiramiento se puede escribir de la forma:

$$\lambda = 1 + \tfrac{1}{2} \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cdot \bar{\mathbf{d}} - \tfrac{1}{8} \left[\bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cdot \bar{\mathbf{d}}\right]^2 + \ldots \tag{3.76}$$

Despreciando los términos de orden superior, la expresión anterior se reduce a:

$$\lambda = 1 + \tfrac{1}{2} \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cdot \bar{\mathbf{d}} \tag{3.77}$$

Sustituyendo la tasa de estiramiento en la Ecuación (3.13) se obtiene la medida de *deformación ingenieril* ε_E de la forma:

$$\varepsilon_E = \tfrac{1}{2} \bar{\mathbf{d}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \cdot \bar{\mathbf{d}} \tag{3.78}$$

Definiendo de nuevo al *tensor de deformación infinitesimal* como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T\right) \tag{3.79}$$

se tiene en general que:

$$\varepsilon_E = \bar{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{d}} \tag{3.80}$$

Sea un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ que definen a un vector unitario como $\bar{\mathbf{d}} = \bar{d}_i \mathbf{e}_i$ y al tensor de deformación infinitesimal de la forma $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, la deformación ingenieril se puede escribir en notación indicial como:

$$\varepsilon_E = \bar{d}_i \varepsilon_{ij} \bar{d}_j$$
$$\varepsilon_E = \bar{d}_1\varepsilon_{11}\bar{d}_1 + \bar{d}_1\varepsilon_{12}\bar{d}_2 + \bar{d}_1\varepsilon_{13}\bar{d}_3 + \bar{d}_2\varepsilon_{21}\bar{d}_1 + \bar{d}_2\varepsilon_{22}\bar{d}_2 + \bar{d}_2\varepsilon_{23}\bar{d}_3 + \quad (3.81)$$
$$+ \bar{d}_3\varepsilon_{31}\bar{d}_1 + \bar{d}_3\varepsilon_{32}\bar{d}_2 + \bar{d}_3\varepsilon_{33}\bar{d}_3$$

La operación tensorial mostrada en las ecuaciones anteriores se puede expresar en notación matricial de la forma:

$$\varepsilon_E = [\bar{\mathbf{d}}]^T [\boldsymbol{\varepsilon}][\bar{\mathbf{d}}]$$
$$\varepsilon_E = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 & \bar{d}_2 & \bar{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

***Observación**. La deformación ingenieril representa el estiramiento unitario de una línea material cuya dirección está definida por el vector unitario $\bar{\mathbf{d}}$ en la configuración de referencia, en otras palabras, ε_E es igual a la deformación longitudinal en la dirección $\bar{\mathbf{d}}$.*

Si la dirección del vector $\bar{\mathbf{d}}$ coincide con el eje coordenado x_1, es decir $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{e}_1$, la deformación ingenieril será igual a la componente ε_{11} del tensor de deformación infinitesimal. De la misma manera, si $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{e}_2$ o $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{e}_3$ la deformación ingenieril es igual a ε_{22} o a ε_{33} respectivamente. En conclusión, las componentes del tensor de deformación $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ representan el estiramiento unitario de líneas materiales paralelas a los ejes coordenados y se denominan *deformaciones longitudinales*.

3.11.2. Distorsión

Sean Q y R dos partículas ubicadas en un entorno diferencial de la partícula P dentro de un cuerpo material, para las cuales $L^{(Q)}\bar{\mathbf{d}}^{(Q)}$ y $L^{(R)}\bar{\mathbf{d}}^{(R)}$ son los vectores definidos por las líneas materiales PQ y PR respectivamente en la configuración de referencia. Como lo muestra la **Figura 3.8** se considera que $L^{(Q)}\bar{\mathbf{d}}^{(Q)}$ y $L^{(R)}\bar{\mathbf{d}}^{(R)}$ conforman un ángulo recto. En cambio, en la configuración actual las líneas materiales PQ y PR definen a los nuevos vectores $l^{(Q)}\mathbf{d}^{(Q)}$ y $l^{(R)}\mathbf{d}^{(R)}$ respectivamente, los cuales conforman un ángulo θ.

Aplicando la definición de tensor gradiente de deformación $\mathbf{F}$ dada en la Ecuación (3.30) a las líneas materiales PQ y PR se tiene que:

$$
\begin{aligned}
l^{(Q)}\mathbf{d}^{(Q)} &= \mathbf{F}\cdot L^{(Q)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)} \\
l^{(R)}\mathbf{d}^{(R)} &= \mathbf{F}\cdot L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(R)}
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{(Q)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)} &= \mathbf{F}^{-1}\cdot l^{(Q)}\mathbf{d}^{(Q)} \\
L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(R)} &= \mathbf{F}^{-1}\cdot l^{(R)}\mathbf{d}^{(R)}
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

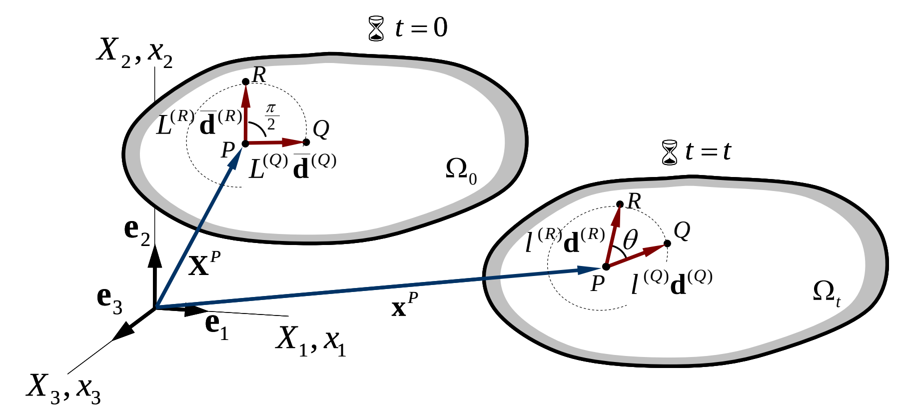


Figura 3.8. Configuración actual y de referencia de dos líneas materiales en un medio continuo.

Del producto escalar entre los vectores $l^{(Q)}\mathbf{d}^{(Q)}$ y $l^{(R)}\mathbf{d}^{(R)}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
l^{(Q)}\mathbf{d}^{(Q)}\cdot l^{(R)}\mathbf{d}^{(R)} &= \mathbf{F}\cdot L^{(Q)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)}\cdot\mathbf{F}\cdot L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(R)} \\
&= L^{(Q)}L^{(R)}F_{ij}\overline{d}_j^{(Q)}F_{ik}\overline{d}_k^{(R)} \\
&= L^{(Q)}L^{(R)}\overline{d}_j^{(Q)}F_{ji}^{T}F_{ik}\overline{d}_k^{(R)} \\
&= L^{(Q)}L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)}\cdot\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{F}\cdot\overline{\mathbf{d}}^{(R)}
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

Sustituyendo el tensor gradiente de deformación **F** dado en la Ecuación (3.47) por la suma entre el tensor gradiente material de desplazamiento $\overline{\mathbf{J}}$ y el tensor unidad de segundo orden **1**, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
l^{(Q)}l^{(R)}\mathbf{d}^{(Q)}\cdot\mathbf{d}^{(R)} &= L^{(Q)}L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)}\cdot\left(\mathbf{1}+\overline{\mathbf{J}}\right)^{T}\cdot\left(\mathbf{1}+\overline{\mathbf{J}}\right)\cdot\overline{\mathbf{d}}^{(R)} \\
&= L^{(Q)}L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)}\cdot\left(\mathbf{1}+\overline{\mathbf{J}}+\overline{\mathbf{J}}^{T}+\overline{\mathbf{J}}^{T}\cdot\overline{\mathbf{J}}\right)\cdot\overline{\mathbf{d}}^{(R)}
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

Despreciando los términos de segundo orden del gradiente material del desplazamiento, es decir, $\overline{\mathbf{J}}^{T}\cdot\overline{\mathbf{J}}\cong 0$, la ecuación anterior se reduce a:

$$
l^{(Q)}l^{(R)}\mathbf{d}^{(Q)}\cdot\mathbf{d}^{(R)} = L^{(Q)}L^{(R)}\overline{\mathbf{d}}^{(Q)}\cdot\left(\mathbf{1}+\overline{\mathbf{J}}+\overline{\mathbf{J}}^{T}\right)\cdot\overline{\mathbf{d}}^{(R)}
\tag{3.87}
$$

Se sustituye el doble del tensor de deformación infinitesimal expresado como $2\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T$, en la ecuación anterior, de tal forma que:

$$l^{(Q)} l^{(R)} \mathbf{d}^{(Q)} \cdot \mathbf{d}^{(R)} = L^{(Q)} L^{(R)} \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} \tag{3.88}$$

Si se divide entre $L^{(Q)} L^{(R)}$ en ambos lados de la ecuación anterior y recordando que el producto escalar entre los vectores unitarios $\mathbf{d}^{(Q)}$ y $\mathbf{d}^{(R)}$ es igual a $\cos\theta$, se obtiene lo siguiente:

$$\cos\theta = \frac{1}{\lambda^{(Q)} \lambda^{(R)}} \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} \tag{3.89}$$

siendo $\lambda^{(Q)}$ y $\lambda^{(R)}$ las tasas de estiramiento de las líneas materiales *PQ* y *PR* respectivamente, definidas por la Ecuación (3.74) de la forma:

$$\begin{aligned} \lambda^{(Q)} &= \sqrt{\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(Q)}} \\ \lambda^{(R)} &= \sqrt{\bar{\mathbf{d}}^{(R)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)}} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Por lo tanto el coseno del ángulo formado por las líneas materiales *PQ* y *PR* en la configuración actual corresponde a:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)}}{\sqrt{\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(Q)}} \sqrt{\bar{\mathbf{d}}^{(R)} \cdot (\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)}}} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} + \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)}}{\sqrt{1 + \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(Q)}} \sqrt{1 + \bar{\mathbf{d}}^{(R)} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)}}} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Como lo muestra la **Figura 3.9**, ahora se considera que $L^{(Q)} \bar{\mathbf{d}}^{(Q)}$ y $L^{(R)} \bar{\mathbf{d}}^{(R)}$ están contenidos en el plano $X_1 X_2$ y conforman un ángulo recto entre los dos. En cambio, en la configuración actual las líneas materiales *PQ* y *PR* definen a los nuevos vectores $l^{(Q)} \mathbf{d}^{(Q)}$ y $l^{(R)} \mathbf{d}^{(R)}$ respectivamente, también contenidos en el plano $x_1 x_2$, los cuales conforman un ángulo $\theta = \theta_{12}$. Si las líneas materiales *PQ* y *PR* son paralelas a los ejes coordenados X_1 y X_2 respectivamente, es decir el vector direccional $\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} = \mathbf{e}_1$ y $\bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_2$, se cumple que:

$$\begin{gathered} \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad , \quad \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} = 1 \quad , \quad \bar{\mathbf{d}}^{(R)} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} = 1 \\ \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1 = \varepsilon_{11} \quad , \quad \bar{\mathbf{d}}^{(R)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2 = \varepsilon_{22} \\ \bar{\mathbf{d}}^{(Q)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2 = \varepsilon_{12} \end{gathered} \tag{3.92}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la Ecuación (3.91), se tiene que:

$$\cos\theta_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}} \tag{3.93}$$

Dado que $\cos\theta_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right)$, el ángulo θ_{12} expresando en la ecuación anterior es igual a:

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left[\frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}}\right] \tag{3.94}$$

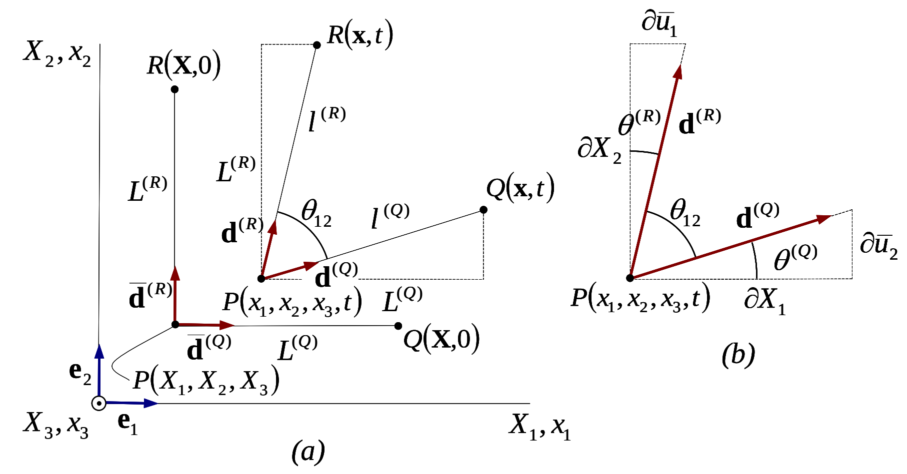


Figura 3.9. Configuración actual y de referencia de dos líneas materiales en un medio continuo considerando la distorsión en el plano x_1x_2: (a) esquema general, (b) elemento diferencial.

La *distorsión* del cuerpo está asociada a la variación del ángulo formado por las líneas materiales *PQ* y *PR* entre la configuración actual y la configuración de referencia, como lo muestra la **Figura 3.9**. Tal variación angular corresponde a $\Delta\theta_{12} = \theta^{(R)} + \theta^{(Q)} = \theta_{12} - \frac{\pi}{2}$ y en consecuencia es igual a:

$$\Delta\theta_{12} = -\arcsin\left[\frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}}\right] \tag{3.95}$$

Suponiendo que las deformaciones infinitesimales son pequeñas comparadas con la unidad, se puede suponer que $-\arcsin(2\varepsilon_{12}) \cong -2\varepsilon_{12}$, $\sqrt{1+2\varepsilon_{11}} \cong 1$ y $\sqrt{1+2\varepsilon_{22}} \cong 1$. Por lo tanto:

$$\Delta\theta_{12} = -2\varepsilon_{12} \tag{3.96}$$

lo cual indica que la componente de deformación ε_{12} es igual a:

$$\varepsilon_{12} = -\tfrac{1}{2}\Delta\theta_{12} \tag{3.97}$$

En *notación ingenieril* se define la *deformación tangencial o angular* γ_{12} o γ_{21} en el plano X_1X_2, como la reducción del ángulo formado por dos líneas materiales paralelas a los ejes coordenados X_1 y X_2 en la configuración de referencia. El valor de dicha deformación es $\gamma_{12} = -\Delta\theta_{12}$, por lo tanto la deformación angular en el plano X_1X_2 mostrado en la **Figura 3.9(b)** es igual a:

$$\gamma_{12} = -\Delta\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta_{12} = \theta^{(Q)} + \theta^{(R)} \tag{3.98}$$

En un elemento diferencial las tangentes de los ángulos $\theta^{(Q)},\theta^{(R)}$ son iguales a las siguientes derivadas parciales de las componentes de desplazamiento.

$$\tan\theta^{(Q)} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \quad , \quad \tan\theta^{(R)} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} \tag{3.99}$$

Dado que $\partial \bar{u}_i / \partial X_j << 1$ se puede considerar que $\tan\theta^{(Q)} \cong \theta^{(Q)}$ y $\tan\theta^{(R)} \cong \theta^{(R)}$, y por lo tanto:

$$\gamma_{12} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \tag{3.100}$$

Este mismo resultado se obtiene al sustituir la Ecuación (3.96) en la Ecuación (3.98), teniendo en cuenta la componente de deformación $\varepsilon_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\partial \bar{u}_1/\partial X_2 + \partial \bar{u}_2/\partial X_1\right)$ definida en la Ecuación (3.65), es decir:

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \tag{3.101}$$

Repitiendo el procedimiento anterior considerando, primero, que el vector direccional $\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} = \mathbf{e}_1$ y $\bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_3$ se obtiene que:

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} \tag{3.102}$$

y segundo, si $\bar{\mathbf{d}}^{(Q)} = \mathbf{e}_2$ y $\bar{\mathbf{d}}^{(R)} = \mathbf{e}_3$ se tiene que:

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_2} \tag{3.103}$$

Observación. *Las componentes del tensor de deformación infinitesimal* $\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ *están asociadas con la reducción del*

ángulo de distorsión dado entre dos líneas materiales y se denominan deformaciones tangenciales o angulares en notación científica.

***Observación**. Como lo indican las ecuaciones (3.101),(3.102) y (3.103), toda componente de deformación tangencial en notación ingenieril es igual al doble de la respectiva deformación en notación científica, es decir* $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$.

La matriz mostrada a continuación representa a las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ en un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$ en *notación ingenieril*, donde los términos de la diagonal $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ corresponden a *deformaciones longitudinales*, mientras que los términos con subíndices diferentes $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ se denominan *deformaciones tangenciales o angulares en notación ingenieril*.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

3.12. Componentes y direcciones principales de deformación

El campo de la deformación al igual que el campo del esfuerzo se describe mediante un tensor simétrico de segundo orden, el cual tiene tres valores propios reales que representan a las *deformaciones principales* y tres vectores propios que definen las *direcciones principales de deformación*.

Físicamente, las *direcciones principales de deformación* establecen la orientación de tres líneas materiales mutuamente ortogonales en la configuración de referencia, que permanecen ortogonales en la configuración actual después de producida la deformación. Por lo tanto, como lo ilustra la **Figura 3.10** no hay distorsión y solo aparecen las componentes de deformación longitudinal a lo largo de tales líneas materiales, denominadas *deformaciones principales*.

Observación. *En general, para un punto material y en un instante de tiempo determinado, las direcciones principales obtenidas del tensor deformación son diferentes de las direcciones principales dadas por el tensor de esfuerzos. Sin embargo, si el material es isótropo ambas direcciones principales coinciden.*

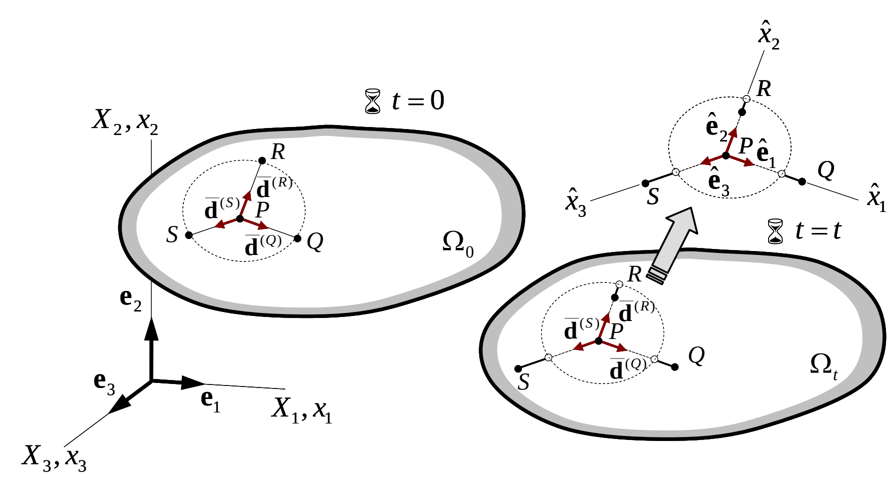


Figura 3.10. Configuración actual y de referencia de tres líneas materiales mutuamente ortogonales en un medio continuo paralelas a las direcciones principales de deformación.

De la misma manera como se indicó en el Apartado 1.6.9, las deformaciones principales $\varepsilon_{(p)}$ y las direcciones principales $\mathbf{m}^{(p)}$, corresponden a los valores y vectores propios de la ecuación homogénea:

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{1}\varepsilon_{(p)}\right)\mathbf{m}^{(p)} &= \mathbf{0} \\
\left(\varepsilon_{ji} - \delta_{ji}\varepsilon_{(p)}\right)m_i^{(p)} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

la cual es igual a tres ecuaciones escalares de la forma:

$$
\begin{aligned}
\left(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{(p)}\right)m_1^{(p)} + \varepsilon_{12}\, m_2^{(p)} + \varepsilon_{13}\, m_3^{(p)} &= 0 \\
\varepsilon_{21} m_1^{(p)} + \left(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{(p)}\right)m_2^{(p)} + \varepsilon_{23}\, m_3^{(p)} &= 0 \\
\varepsilon_{31} m_1^{(p)} + \varepsilon_{32}\, m_2^{(p)} + \left(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{(p)}\right)m_3^{(p)} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

En notación matricial y recordando la simetría del tensor de deformaciones las ecuaciones anteriores se reescriben como:

$$
\begin{bmatrix}
\left(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{(p)}\right) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\
\varepsilon_{12} & \left(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{(p)}\right) & \varepsilon_{23} \\
\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \left(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{(p)}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_1^{(p)} \\ m_2^{(p)} \\ m_3^{(p)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{3.107}
$$

siendo conocidas las componentes de deformación. Para calcular las incógnitas $m_i^{(p)}$ y $\varepsilon_{(p)}$, además de las 3 ecuaciones indicadas en (3.106), se recurre a la condición de normalización de los vectores principales expresada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(p)} \cdot \mathbf{m}^{(p)} &= 1 \\ m_i^{(p)} m_i^{(p)} &= 1 \\ \left(m_1^{(p)}\right)^2 + \left(m_2^{(p)}\right)^2 + \left(m_3^{(p)}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Para obtener la solución no trivial de la Ecuación (3.107), el determinante de la matriz presentada a la izquierda debe ser igual a cero, lo cual da como resultado una ecuación cúbica para $\varepsilon_{(p)}$ denominada *ecuación característica del tensor de deformaciones* de la forma:

$$\varepsilon_{(p)}^3 - I_1' \varepsilon_{(p)}^2 + I_2' \varepsilon_{(p)} - I_3' = 0 \tag{3.109}$$

cuyas raíces $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}$ denominadas *valores principales del tensor de deformaciones* son reales y se ordenan de tal manera que $\varepsilon_{(1)} > \varepsilon_{(2)} > \varepsilon_{(3)}$. Los coeficientes de la ecuación cúbica I_1', I_2', I_3' se conocen como el *primer, segundo y tercer invariante del tensor de deformaciones* y se expresan de la forma:

$$\begin{aligned} I_1' &= \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \\ I_2' &= \tfrac{1}{2}\left\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2\right\} \\ I_3' &= \det\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.110}$$

Cada valor principal de deformación $\varepsilon_{(p)}$ está asociado a una dirección principal definida por un vector propio normalizado $\mathbf{m}^{(p)}$, que cumple con la Ecuación (3.105).

Si los valores principales de deformación son distintos las direcciones principales son mutuamente ortogonales. En cambio, si dos o tres valores principales son iguales, las expresiones anteriores se siguen cumpliendo pero los ejes principales dados por los vectores $\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{m}^{(3)}$ no estarán definidos de forma única.

Si dos valores principales son iguales, por ejemplo si $\varepsilon_{(1)} = \varepsilon_{(2)} \neq \varepsilon_{(3)}$, el vector propio $\mathbf{m}^{(3)}$ está definido, mientras que los vectores $\mathbf{m}^{(1)}$ y $\mathbf{m}^{(2)}$ corresponden a cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{m}^{(3)}$. Por otro lado, si los tres valores principales de deformación son iguales, todo vector unitario es un vector propio del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Con el fin de conformar un sistema coordenado cartesiano derecho con los ejes principales de deformaciones, se establece que los vectores propios $\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{m}^{(3)}$ sean vectores unitarios mutuamente ortogonales.

El *sistema coordenado principal de deformaciones* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ se define como a aquel sistema coordenado conformado por los ejes principales del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$. Asimismo, se denominan *vectores base principal* $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ a los tres vectores unitarios paralelos a cada uno de los ejes principales. Por lo tanto el tensor de deformaciones escrito en términos de sus componentes en un sistema coordenado principal corresponde a:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \qquad \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{(i)} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{3.111}$$

La matriz $[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}]$ de componentes del tensor de deformaciones expresados en el sistema coordenado dado por la base $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$, corresponde a una matriz diagonal cuyos coeficientes son los valores de deformación principal, es decir,

$$[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

El Apartado 1.6.11 describe un procedimiento de cálculo de los valores y direcciones principales de un tensor simétrico de segundo orden como el tensor de deformaciones.

3.13. Cambio de volumen y deformación volumétrica

Sea dV_0 el volumen de un paralelepípedo infinitesimal en la configuración de referencia del cuerpo mostrado en la **Figura 3.11**, cuyos lados son líneas materiales paralelas a los ejes del sistema coordenado dado en la base $\mathbf{e}_i$.

Cada uno de los lados del paralelepípedo está definido por un vector de la forma:

$$d\mathbf{X}^{(1)} = dX^{(1)}\mathbf{e}_1 \quad , \quad d\mathbf{X}^{(2)} = dX^{(2)}\mathbf{e}_2 \quad , \quad d\mathbf{X}^{(3)} = dX^{(3)}\mathbf{e}_3 \tag{3.113}$$

y por lo tanto su volumen será igual a:

$$dV_0 = dX^{(1)} dX^{(2)} dX^{(3)} \tag{3.114}$$

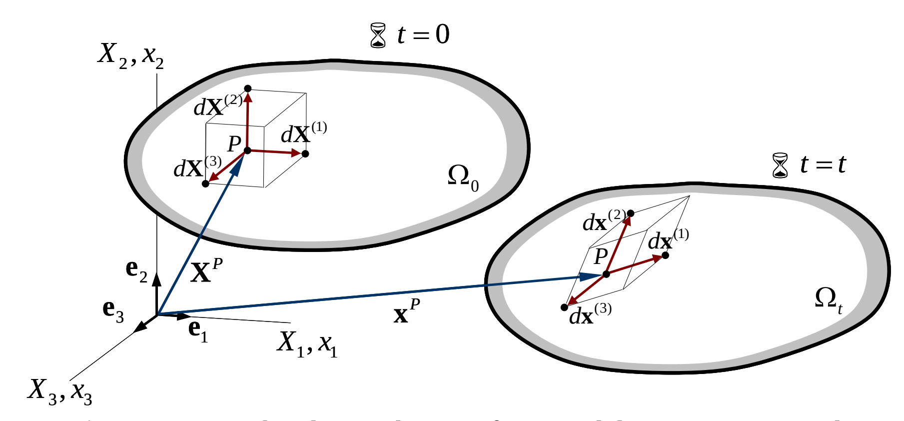


Figura 3.11. Cambio de un volumen infinitesimal de un cuerpo material.

Después de producida la deformación en el cuerpo los nuevos lados del volumen infinitesimal en la configuración actual están definidos por los vectores $d\mathbf{x}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}$ y $d\mathbf{x}^{(3)}$, los cuales no son paralelos a los ejes coordenados.

Recordando la relación establecida en la Ecuación (3.30) entre el vector que describe una línea material en la configuración actual y en la configuración de referencia, se tiene que:

$$d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)} \quad d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} \quad d\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(3)} \tag{3.115}$$

$$dx_i^{(1)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j^{(1)} \quad dx_i^{(2)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j^{(2)} \quad dx_i^{(3)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j^{(3)} \tag{3.116}$$

El volumen infinitesimal deformado dado en la configuración actual dV_t se define como el triple producto entre los vectores asociados a sus lados de la forma:

$$\begin{aligned} dV_t &= d\mathbf{x}^{(1)} \cdot \left(d\mathbf{x}^{(2)} \times d\mathbf{x}^{(3)} \right) \\ dV_t &= \tilde{p}_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)} \end{aligned} \tag{3.117}$$

Sustituyendo la Ecuación (3.116) en la expresión anterior se tiene que:

$$dV_t = \tilde{p}_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_r} dX_r^{(1)} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} dX_s^{(2)} \frac{\partial x_k}{\partial X_t} dX_t^{(3)}$$
$$dV_t = \tilde{p}_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} \frac{\partial x_k}{\partial X_t} dX_r^{(1)} dX_s^{(2)} dX_t^{(3)} \tag{3.118}$$

De acuerdo con la Ecuación (3.113) las componentes de los vectores paralelos a los ejes coordenados que determinan los lados del volumen en la configuración de referencia son:

$$\left[d\mathbf{X}^{(1)}\right] = \left[dX_1^{(1)} \quad dX_2^{(1)} \quad dX_3^{(1)}\right]^T = \left[dX^{(1)} \quad 0 \quad 0\right]^T$$
$$\left[d\mathbf{X}^{(2)}\right] = \left[dX_1^{(2)} \quad dX_2^{(2)} \quad dX_3^{(2)}\right]^T = \left[0 \quad dX^{(2)} \quad 0\right]^T \tag{3.119}$$
$$\left[d\mathbf{X}^{(3)}\right] = \left[dX_1^{(3)} \quad dX_2^{(3)} \quad dX_3^{(3)}\right]^T = \left[0 \quad 0 \quad dX^{(3)}\right]^T$$

Por lo tanto el volumen deformado se puede expresar así:

$$dV_t = \tilde{p}_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dV_0 \tag{3.120}$$

El factor que multiplica a dV_0 al lado derecho de la ecuación anterior es el *determinante del tensor gradiente de deformación* o *Jacobiano*, el cual se expresa de la forma:

$$\tilde{p}_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \det \mathbf{F} \tag{3.121}$$

En conclusión el cociente entre el volumen infinitesimal deformado con respecto al volumen infinitesimal en la configuración de referencia es igual a:

$$\frac{dV_t}{dV_0} = \det \mathbf{F} \tag{3.122}$$

Observación*.* *Un material se define como incompresible cuando no cambia de volumen durante el proceso de deformación, por lo tanto el* $dV_t / dV_0 = \det \mathbf{F} = 1$

3.13.1. Deformación volumétrica finita

Sin realizar ninguna simplificación, se denomina *deformación volumétrica finita* E_{vol} a la variación del volumen deformado con respecto al volumen en la configuración de referencia, es decir:

$$E_{vol} = \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = \frac{dV_t}{dV_0} - 1$$
$$E_{vol} = \det \mathbf{F} - 1 \tag{3.123}$$

Sustituyendo la Ecuación (3.47) se puede expresar la deformación volumétrica en función del tensor gradiente material de desplazamiento como:

$$E_{vol} = \det\left(\mathbf{1} + \overline{\mathbf{J}}\right) - 1 \tag{3.124}$$

3.13.2. Deformación volumétrica infinitesimal

De acuerdo con la teoría de la deformación infinitesimal, la cual considera que tanto el campo del desplazamiento, como el campo de la deformación son pequeños, se pueden despreciar los términos de orden superior de los gradientes de desplazamiento presentes en el cálculo del determinante de $\left(\mathbf{1} + \overline{\mathbf{J}}\right)$, reduciéndolo a:

$$\det \mathbf{F} = \det\left(\mathbf{1} + \overline{\mathbf{J}}\right) \cong 1 + \mathrm{tr}\overline{\mathbf{J}} \tag{3.125}$$

Se define a la *dilatación* o *deformación volumétrica infinitesimal* ε_{vol} como la variación del volumen deformado con respecto al volumen en la configuración de referencia considerando deformaciones infinitesimales. Reemplazando el resultado anterior en la Ecuación (3.124) se obtiene que:

$$\varepsilon_{vol} = \mathrm{tr}\overline{\mathbf{J}} \tag{3.126}$$

Recordando que el tensor de deformación infinitesimal es igual a $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{J}} + \overline{\mathbf{J}}^T\right)$, se puede evaluar su traza de la forma:

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\overline{\mathbf{J}} + \mathrm{tr}\overline{\mathbf{J}}^T\right) = \mathrm{tr}\overline{\mathbf{J}} \tag{3.127}$$

En conclusión la dilatación o deformación volumétrica infinitesimal es igual a la traza del tensor de deformación infinitesimal, la cual es una cantidad invariante de dicho tensor, es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{vol} &= \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\end{aligned} \tag{3.128}$$

***Observación**. En un estado de deformaciones infinitesimales representado por un tensor desviador, la deformación volumétrica infinitesimal es igual a cero, es decir $\varepsilon_{vol}^{dev} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^{dev} = 0$. Por lo tanto la presencia exclusiva de la distorsión no produce cambio de volumen del cuerpo.*

3.14. Estado plano de deformaciones infinitesimales

El *estado plano o condición plana de deformaciones* es una simplificación del estado tridimensional, en el cual las componentes de deformación contenidas en un plano coordenado específico pueden ser diferentes de cero, mientras que las demás componentes son nulas. La **Figura 3.12** muestra una tajada de espesor unitario de un muro de contención sometido a cargas contenidas en el plano x_1x_2, como ejemplo de la condición plana de deformaciones en dicho plano.

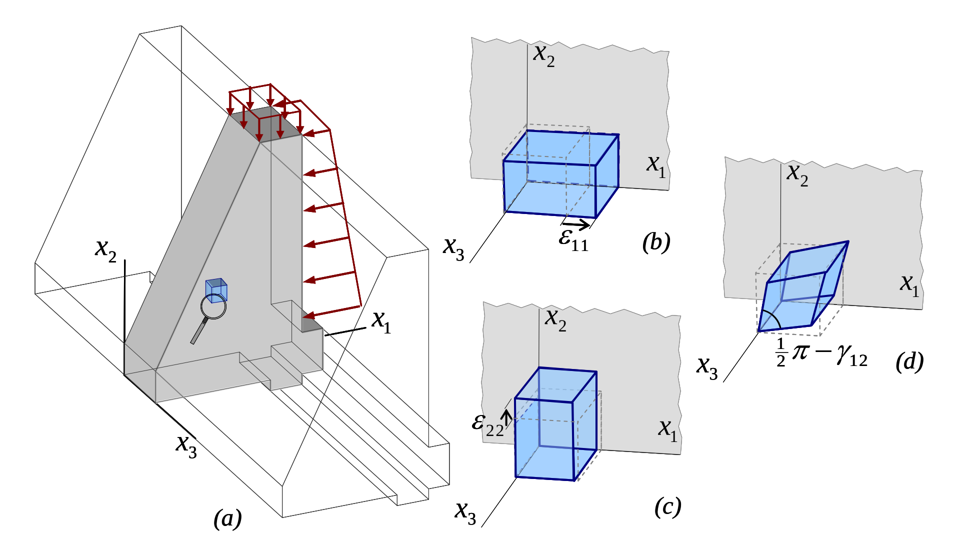


Figura 3.12. Sólido en condición plana de deformaciones en el plano x_1x_2: (a) corte de espesor unitario de un muro de contención; estado de deformaciones de un elemento infinitesimal: (b) deformación longitudinal en x_1, (c) deformación longitudinal en x_2, (b) deformación angular en el plano x_1x_2.

En condición plana de deformaciones en x_1x_2, el estado de deformaciones es el mismo para todos los planos paralelos a x_1x_2 dentro del sólido, de tal manera que las deformaciones estarán definidas en un espacio bidimensional. Por otro lado, las componentes de esfuerzo dadas en la condición plana de deformaciones no necesariamente están contenidas en el plano en cuestión.

En general se considera un sólido que cumple con la condición plana de deformaciones en el plano x_1x_2 definido en un sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_i$. Por lo tanto la matriz de componentes del tensor de deformaciones en dicho sistema coordenado es de la forma:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.129)$$

3.14.1. Transformación de las componentes de deformación

Sea $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ un nuevo sistema coordenado definido por los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$, cuyo eje $\bar{x}_3$ coincide con el eje x_3 del sistema coordenado original definido por los vectores base $\mathbf{e}_i$. Por lo tanto $\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ y el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2$ es el mismo plano x_1x_2, como lo ilustra la **Figura 2.19**. La matriz de componentes de deformación definidas en un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ se puede escribir de la forma:

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.130)$$

Dada la relación entre los dos sistemas coordenados, existe un ángulo θ contenido en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2 \equiv x_1x_2$, definido entre los ejes x_1 y $\bar{x}_1$ o entre los ejes x_2 y $\bar{x}_2$, y de magnitud positiva en el sentido positivo del eje $\bar{x}_3 \equiv x_3$.

De acuerdo con la ley de transformación de componentes de un tensor de segundo orden que se indicó en la Ecuación (1.65), la matriz de las componentes de deformaciones en la nueva base es igual a $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] = [\mathbf{M}][\boldsymbol{\varepsilon}][\mathbf{M}]^T$, donde los términos de la matriz de transformación $[\mathbf{M}]$ corresponden a los productos punto entre los vectores de las dos bases, es decir $M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Para la condición plana de deformaciones en el plano $\bar{x}_1\bar{x}_2 \equiv x_1x_2$ los coeficientes de transformación son iguales a:

$$\begin{array}{lll} M_{11}=\bar{\mathbf{e}}_1\cdot\mathbf{e}_1=\cos\theta & M_{12}=\bar{\mathbf{e}}_1\cdot\mathbf{e}_2=\sin\theta & M_{13}=\bar{\mathbf{e}}_1\cdot\mathbf{e}_3=0 \\ M_{21}=\bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_1=-\sin\theta & M_{22}=\bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_2=\cos\theta & M_{23}=\bar{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_3=0 \\ M_{31}=\bar{\mathbf{e}}_3\cdot\mathbf{e}_1=0 & M_{32}=\bar{\mathbf{e}}_3\cdot\mathbf{e}_2=0 & M_{33}=\bar{\mathbf{e}}_3\cdot\mathbf{e}_3=1 \end{array} \tag{3.131}$$

De acuerdo con los coeficientes indicados anteriormente la matriz de transformación para un estado plano de deformaciones es de la forma:

$$[\mathbf{M}]=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.132}$$

En conclusión las componentes de deformaciones en la base $\bar{\mathbf{e}}_i$ son iguales a:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta+\varepsilon_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})-\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta-\varepsilon_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin 2\theta+\varepsilon_{12}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{3.133}$$

En términos de la medida ingenieril de deformación angular $\gamma_{12}=2\varepsilon_{12}$, las expresiones anteriores se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})-\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta-\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\sin 2\theta \\ \bar{\gamma}_{12} &= -(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin 2\theta+\gamma_{12}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{3.134}$$

3.14.2. Deformaciones y direcciones principales

A continuación se evalúan las deformaciones principales y las respectivas direcciones principales para un estado plano de deformaciones, en el cual las componentes $\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33}$ son iguales a cero. En particular las invariantes de deformación son iguales a:

$$\begin{aligned} I'_1 &= \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} \\ I'_2 &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2 \\ I'_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.135}$$

las cuales son sustituidas en la ecuación característica del tensor de deformación obteniendo:

$$\varepsilon_{(p)}\left[\varepsilon_{(p)}^2-\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\varepsilon_{(p)}+\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2\right)\right]=0 \tag{3.136}$$

Se observa que una de las tres deformaciones principales $\varepsilon_{(p)}=\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)},\varepsilon_{(3)}$ es igual a cero. Se establece de forma arbitraria que $\varepsilon_{(3)}=0$. Por lo tanto, la matriz de las componentes del tensor de deformaciones en la base principal se escribe como:

$$[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.137}$$

Siendo $\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)}$ las deformaciones principales correspondientes a las raíces de la expresión cuadrática indicada entre corchetes en la Ecuación (3.136), iguales a:

$$\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\pm\sqrt{\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)^2+4\varepsilon_{12}^2}\right] \tag{3.138}$$

y en notación ingenieril a:

$$\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\pm\sqrt{\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)^2+\gamma_{12}^2}\right] \tag{3.139}$$

Sea α el ángulo definido entre el eje x_1 y el eje principal $\hat{x}_1$ como lo indica la **Figura 2.21(b)**, las tres direcciones principales asociadas a las tres deformaciones principales $\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)},\varepsilon_{(3)}$ están dadas por los siguientes vectores unitarios:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^{(1)}&=\cos\alpha\,\mathbf{e}_1+\sin\alpha\,\mathbf{e}_2\\ \mathbf{m}^{(2)}&=-\sin\alpha\,\mathbf{e}_1+\cos\alpha\,\mathbf{e}_2\\ \mathbf{m}^{(3)}&=\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{3.140}$$

Sustituyendo las componentes del vector $\mathbf{m}^{(1)}$ y la deformación principal $\varepsilon_{(1)}$ en la primera expresión escalar de la Ecuación (3.107), se tiene que:

$$\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{(1)}\right)\cos\alpha+\varepsilon_{12}\sin\alpha=0$$

Dividiendo la expresión anterior entre $\cos\alpha$, se establece el valor de α como:

$$\tan\alpha=-\frac{2\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{(1)}\right)}{\gamma_{12}} \tag{3.141}$$

Otra forma de calcular el ángulo α es la siguiente. Dadas las componentes de deformación en un sistema coordenado paralelo a las direcciones principales, la componente de deformación angular $\bar{\gamma}_{12}$ debe ser nula. Igualando a cero la Ecuación (3.134) se tiene que:

$$\bar{\gamma}_{12} = -(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\sin 2\alpha + \gamma_{12}\cos 2\alpha = 0$$

Dividiendo la expresión anterior entre $\cos 2\alpha$, se obtiene:

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \tag{3.142}$$

De la misma forma presentada para un estado de esfuerzos, un estado plano de deformación se puede representar gráficamente mediante el denominado *círculo de Mohr en deformaciones*, cuya abscisa indica las deformaciones longitudinales ε y la ordenada indica la mitad de la deformación angular en notación ingenieril $\frac{1}{2}\gamma$ (**Figura 3.13**).

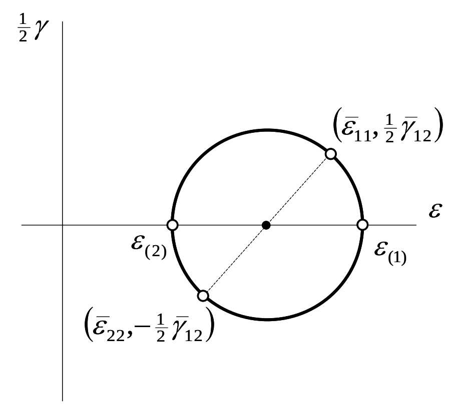


Figura 3.13. Círculo de Mohr en deformaciones para un estado definido en el plano x_1x_2.

3.15. Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones infinitesimales

A continuación se establece la relación entre las seis componentes del tensor de deformación infinitesimal, las cuales deben satisfacer un estado de deformaciones *físicamente admisible*.

Como se indicó anteriormente, el campo de las deformaciones infinitesimales es función del gradiente del campo del desplazamiento,

siendo este último un grupo de funciones continuas, al igual que sus derivadas, que depende de la posición del punto material y del tiempo.

La relación obtenida en la Ecuación (3.69) entre las componentes de deformación infinitesimal y de desplazamiento corresponde a un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \gamma_{13} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \gamma_{23} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{array} \tag{3.143}$$

siendo u_1, u_2, u_3 tres funciones continuas y derivables para todo punto material en el dominio del medio continuo.

Si las funciones de desplazamiento u_1, u_2, u_3 en términos de la posición (x_1, x_2, x_3) son conocidas, las seis componentes de deformación se obtienen evaluando las derivadas de los u_i con respecto a los x_j. En cambio, cuando se desean calcular las tres componentes de desplazamiento, siendo conocidas las seis componentes de deformación, se conforma un sistema de seis ecuaciones con tres incógnitas, para el cual podría o no existir una solución, es decir, un valor de las funciones de desplazamiento obtenido de un grupo de componentes de deformación escogidas de forma arbitraria.

Si se deriva dos veces la componente ε_{11} con respecto a x_2, al igual que se deriva dos veces la componente ε_{22} con respecto a x_1 se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \tag{3.144}$$

Derivando la componente de deformación γ_{12} con respecto a x_1 y a x_2 se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \tag{3.145}$$

Sustituyendo la Ecuación (3.144) en la expresión anterior se obtiene la primera ecuación de compatibilidad de deformaciones infinitesimales de la forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.146}$$

De la misma manera se obtienen otras dos ecuaciones de compatibilidad relacionadas con las componentes de deformación γ_{13} y γ_{23} indicadas a continuación:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \tag{3.147}$$

Ahora, derivando la componente ε_{11} con respecto a x_2 y a x_3 se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \tag{3.148}$$

y la segunda derivada de las componentes de deformación angular γ_{23}, γ_{13} y γ_{12} con respecto a x_1, x_2 y x_3 respectivamente son las siguientes:

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

De la suma de las tres ecuaciones anteriores se obtiene:

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$= 2\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

de donde se concluye que:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{3.149}$$

De la misma manera se obtienen otras dos ecuaciones de compatibilidad relacionadas con las componentes de deformación ε_{22} y ε_{33} indicadas a continuación:

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_3^2}
\end{aligned}
\tag{3.150}
$$

La siguiente expresión general en notación indicial corresponde a un conjunto de 81 ecuaciones escalares de las cuales solo 6 son diferentes no triviales y coinciden con las ecuaciones de compatibilidad (3.146), (3.147), (3.149) y (3.150).

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{3.151}
$$

Cuando se cumplen las ecuaciones de compatibilidad, las componentes de deformación constituyen un estado de *deformación admisible*, en otras palabras existe compatibilidad entre tales las componentes.

3.16. Componentes de deformación infinitesimal en notación de Voigt

De acuerdo con la *notación de Voigt*, las componentes de deformación infinitesimal longitudinal y tangencial en notación ingenieril pueden representarse mediante una matriz columna $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ cuyos términos están organizados de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \gamma_{23} & \gamma_{13} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T \\
\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
\tag{3.152}
$$

En particular para la *condición plana de deformaciones*, la matriz columna $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ se puede reducir de la forma:

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T \\
\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
\tag{3.153}
$$

La utilización de las deformaciones tangenciales ingenieriles $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ como términos de la matriz columna de la deformación busca que las expresiones de la energía sean equivalentes en notación tensorial y

en notación de Voigt. Se puede verificar que la energía interna por unidad de volumen está dada por las siguientes expresiones equivalentes:

$$\rho u = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}\sigma_{11} + \varepsilon_{12}\sigma_{12} + \varepsilon_{13}\sigma_{13} + \varepsilon_{21}\sigma_{21} + \varepsilon_{22}\sigma_{22} + \varepsilon_{23}\sigma_{23} +$$
$$+ \varepsilon_{31}\sigma_{31} + \varepsilon_{32}\sigma_{32} + \varepsilon_{33}\sigma_{33}) \qquad (3.154)$$

$$\rho u = \tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}\sigma_{11} + \varepsilon_{22}\sigma_{22} + \varepsilon_{33}\sigma_{33} + 2\varepsilon_{23}\sigma_{23} + 2\varepsilon_{13}\sigma_{13} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12})$$

Las componentes de deformación infinitesimal en un sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ se pueden obtener de la siguiente operación matricial:

$$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \qquad (3.155)$$

siendo $[\mathbf{T}]$ la matriz de transformación de sistema coordenado de las componentes de deformación en notación de Voigt, la cual coincide con la matriz planteada anteriormente para transformar estados tridimensionales y bidimensionales de esfuerzos en las ecuaciones (2.134) y (2.135).

Ejemplo 3.3. Sobre una superficie plana de un sólido se ubican tres deformímetros eléctricos unidireccionales *a*, *b* y *c*, como se indica en la **Figura 3.14**. Después de aplicar las cargas sobre el sólido las lecturas de las galgas establecen a las deformaciones longitudinales ε_a en la dirección del eje x_1, ε_b en la dirección del eje x_2 y ε_c a 45º del eje x_1 en el plano x_1x_2. Encontrar la componente de deformación angular ingenieril γ_{12} en función de las lecturas de los deformímetros.

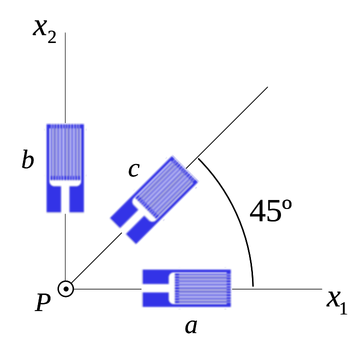


Figura 3.14. Deformímetros eléctricos en un punto *P*.

Sea $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ la matriz de componentes del tensor de deformación del punto P con respecto a un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ de vectores base $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. La componente de deformación longitudinal en la dirección del eje x_1 es igual a $\varepsilon_{11}=\varepsilon_a$, y la deformación longitudinal en la dirección del eje x_2 corresponde a $\varepsilon_{22}=\varepsilon_b$.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13}\\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23}\\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}$$

La deformación longitudinal de una línea material en dirección $\overline{\mathbf{d}}$ es igual $\overline{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\overline{\mathbf{d}}$, por lo tanto la deformación $\varepsilon_c=\overline{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\overline{\mathbf{d}}$ cuando $\overline{\mathbf{d}}=\cos 45^{\circ}\mathbf{e}_1+\sin 45^{\circ}\mathbf{e}_2$. La anterior operación se puede escribir en notación matricial de la forma:

$$\varepsilon_c=[\overline{\mathbf{d}}]^T[\boldsymbol{\varepsilon}][\overline{\mathbf{d}}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13}\\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23}\\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$$

obteniendo como resultado:

$$\varepsilon_c=\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\gamma_{12}\right)$$

En consecuencia la componente de deformación angular ingenieril en el plano x_1x_2 es igual a:

$$\gamma_{12}=2\varepsilon_c-\left(\varepsilon_a+\varepsilon_b\right)$$

Ejemplo 3.4. Para el ejemplo anterior, calcular los valores principales de deformación en términos de las deformaciones longitudinales $\varepsilon_a,\varepsilon_b,\varepsilon_c$, considerando un estado plano de deformaciones.

Suponiendo un estado plano de deformaciones la matriz de componentes del tensor de deformación del punto P con respecto a un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ será de la forma:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y las deformaciones principales se obtendrán como:

$$\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)} = \tfrac{1}{2}\left[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \pm \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2} \right]$$

Sustituyendo a $\varepsilon_{11} = \varepsilon_a$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_b$ y $\gamma_{12} = 2\varepsilon_c - (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ de la solución del problema anterior se tiene:

$$\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)} = \tfrac{1}{2}\left[(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \pm \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + 4\varepsilon_c^2 - 4\varepsilon_c(\varepsilon_a + \varepsilon_b) + (\varepsilon_a + \varepsilon_b)^2} \right]$$

de donde se llega a:

$$\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}{2}}$$

Capítulo 4
Leyes de conservación y principio de los trabajos virtuales

Las leyes de conservación permiten establecer que una cantidad física en un medio continuo se conserva en el tiempo, independientemente del comportamiento del material del cual está compuesto y del orden de magnitud de sus deformaciones. A continuación se describen las leyes de conservación de magnitudes como la *masa*, la *cantidad de movimiento* o *momentum lineal*[4], el *momento de la cantidad de movimiento* o *momentum angular*[5] y la *energía*. Asimismo, al final de este capítulo se presenta brevemente el *principio de los trabajos virtuales* el cual permite establecer el equilibrio de un cuerpo a partir del trabajo interno y externo asociado a una variación del desplazamiento (Timoshenko & Young 1965; Lanczos 1970; Spencer 1990; Oñate 1995; Popov 1998; Mase & Mase 1999; Oliver & Agelet 2002; Shabana 2008).

4.1. Derivadas temporales

Una propiedad física o cinemática puede expresarse en función de sus coordenadas materiales $\mathbf{X}$ o en términos de sus coordenadas espaciales $\mathbf{x}$.

---

[4] En Mecánica clásica, cantidad de movimiento es la traducción del vocablo inglés *linear momentum*.

[5] El momento de la cantidad de movimiento es la traducción del vocablo inglés *angular momentum*.

Sea $\boldsymbol{\Psi}$ (o en notación indicial $\Psi_{ij\ldots}$), una propiedad escalar, vectorial o tensorial específica, cuya descripción material es $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X},t)$ y su descripción espacial corresponde a $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t)$. A continuación se definen dos tipos de derivadas en el tiempo.

- La *derivada local* corresponde a la variación de la propiedad con respecto al tiempo en un punto espacial, es decir en un punto fijo en el espacio. Si la propiedad está dada en descripción espacial, la derivada local se escribe de la forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{4.1}$$

- La *derivada material* corresponde a la variación de la propiedad con respecto al tiempo en un punto material, es decir siguiendo una partícula específica. La derivada material de una propiedad se denota con el operador diferencial d/dt. Si la propiedad está dada en descripción material, recordando que las coordenadas materiales $\mathbf{X}$ no cambian en el tiempo, la derivada material es igual a:

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \tag{4.2}$$

La derivada material de una propiedad expresada en descripción espacial, es decir que el punto de interés estará cambiando de posición en el espacio, requiere la aplicación de la regla de la cadena para derivadas parciales así:

$$\frac{d\Psi_{ij\ldots}(x_k(X_l,t),t)}{dt} = \frac{\partial \Psi_{ij\ldots}(x_k,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{ij\ldots}(x_k,t)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(X_l,t)}{\partial t} \tag{4.3}$$

La *velocidad* se define como la derivada de las ecuaciones de movimiento con respecto al tiempo de la forma $v_k = \partial x_k / \partial t$ en notación indicial o $\mathbf{v} = \partial \mathbf{x}/\partial t = \dot{\mathbf{x}}$ en notación compacta. El *gradiente* de un campo escalar, vectorial o tensorial corresponde a la derivada parcial del campo con respecto a las componentes del vector posición, por lo tanto $\partial \boldsymbol{\Psi}/\partial x_i = \nabla \boldsymbol{\Psi}$. De acuerdo a lo anterior, se obtiene la siguiente expresión de la propiedad tensorial $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t)$, la cual puede generalizarse para cualquier propiedad escalar, vectorial o tensorial de una partícula.

$$\frac{d\mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot \nabla \mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t) \tag{4.4}$$

El segundo término del lado derecho de la igualdad anterior que corresponde con la diferencia entre la derivada material y la derivada local de una propiedad se denomina *derivada convectiva* y está definida como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot \nabla \mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t)}{dt} - \frac{\partial \mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{4.5}$$

> ***Observación**. Cuando la velocidad es nula se observa que las derivadas material y espacial coinciden. El término convección está relacionado con fenómenos de transporte de masa o de partículas.*

4.2. Derivada temporal material de una integral de volumen

Se define a $\phi(\mathbf{x},t)$ como un campo escalar, vectorial o tensorial, que representa una cantidad física $\Phi(t)$ por unidad de masa asociada a una partícula ubicada en la posición **x** y en un instante de tiempo *t*. La cantidad $\Phi(t)$ contenida en un volumen arbitrario $\tilde{V}$ en un instante de tiempo *t*, es igual a la integral de la cantidad por unidad de volumen $\rho\phi$, es decir:

$$\Phi(t) = \int_{\tilde{V}} \rho\phi(\mathbf{x},t)dV \tag{4.6}$$

La derivada temporal de la cantidad física $\Phi(t)$ está definida como:

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \tag{4.7}$$

Si el volumen arbitrario corresponde a un *volumen de control V*, la derivada temporal de $\Phi(t)$ se denomina *derivada local de la integral de volumen* y se define como:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho\phi(\mathbf{x},t)dV \tag{4.8}$$

Sustituyendo la Ecuación (4.6) y la Ecuación (4.7) se tiene que:

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_V \rho\phi(\mathbf{x}, t+\Delta t)dV - \int_V \rho\phi(\mathbf{x}, t)dV\right]$$
$$= \int_V \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\rho\phi(\mathbf{x}, t+\Delta t) - \rho\phi(\mathbf{x}, t)\right]dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\phi(\mathbf{x}, t)\right]dV$$

Igualando la expresión anterior con la Ecuación (4.8) se establece que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\phi \, dV = \int_V \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} dV \tag{4.9}$$

Si el volumen arbitrario indicado en la Ecuación (4.6) es un volumen material V_t en el instante *t*, la derivada temporal de $\Phi(t)$ se denomina *derivada material de la integral de volumen* y se define como:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho\phi(\mathbf{x}, t)dV \tag{4.10}$$

La cantidad física en los instantes *t* y $t + \Delta t$ corresponden a integrales de $\rho\phi$ en volúmenes diferentes:

$$\Phi(t) = \int_{V_t} \rho\phi(\mathbf{x}, t)dV_t \quad , \quad \Phi(t+\Delta t) = \int_{V_{t+\Delta t}} \rho\phi(\mathbf{x}, t+\Delta t)dV_{t+\Delta t} \tag{4.11}$$

Dado que el diferencial de volumen en el instante *t* y en $t + \Delta t$ es igual a $dV_t = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)dV_0$ y $dV_{t+\Delta t} = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t+\Delta t)dV_0$, respectivamente como lo indica la Ecuación (3.122), la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\Phi(t) = \int_{V_0} \rho\phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)dV_0 = \int_{V_0} \rho\bar{\phi}(\mathbf{X}, t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)dV_0$$

$$\Phi(t+\Delta t) = \int_{V_0} \rho\phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t+\Delta t), t+\Delta t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t+\Delta t)dV_0$$
$$= \int_{V_0} \rho\bar{\phi}(\mathbf{X}, t+\Delta t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t+\Delta t)dV_0$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la Ecuación (4.7) se obtiene:

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} \int_{V_0} \rho\bar{\phi}(\mathbf{X}, t+\Delta t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t+\Delta t)dV_0 - \\ - \int_{V_0} \rho\bar{\phi}(\mathbf{X}, t)\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)dV_0 \end{bmatrix}$$

donde el volumen de integración es ahora el mismo y por lo tanto,

$$\dot{\Phi}(t) = \int_{V_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\rho \bar{\phi}(\mathbf{X}, t + \Delta t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \rho \bar{\phi}(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right] dV_0$$

$$\dot{\Phi}(t) = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \bar{\phi}(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right] dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} \left[\rho \phi(\mathbf{x}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right] dV_0$$

$$= \int_{V_0} \left(\det \mathbf{F} \frac{d}{dt} [\rho \phi] + \rho \phi \frac{d}{dt} [\det \mathbf{F}] \right) dV_0$$

Se puede demostrar que $d[\det \mathbf{F}]/dt = (\det \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{v})$ y en consecuencia, la expresión anterior se reduce a:

$$\dot{\Phi}(t) = \int_{V_0} \left(\det \mathbf{F} \frac{d}{dt} [\rho \phi] + \rho \phi (\det \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV_0$$

Finalmente recordando que $dV_t = \det \mathbf{F} dV_0$, se concluye que la *derivada material de la integral de volumen* es igual a:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \phi dV = \int_{V} \left(\frac{d}{dt} (\rho \phi) + \rho \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \tag{4.12}$$

Sustituyendo la Ecuación (4.4) en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \phi dV = \int_{V} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{v}) \right) dV \tag{4.13}$$

El término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{v}) &= \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \\ &= \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde el primer término entre paréntesis a la derecha de la igualdad es el resultado de aplicar la Ecuación (4.4) al campo ϕ. En cambio, el segundo paréntesis está definido por el principio de conservación de la masa, el cual se explicará en el siguiente apartado. De acuerdo a lo anterior se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sustituyendo el resultado en la Ecuación (4.14), se concluye que:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\phi\, dV = \int_V \rho \frac{d\phi}{dt} dV \tag{4.16}$$

4.3. Conservación de la masa

El *principio de la conservación de la masa* establece que la cantidad de materia o *masa* de un cuerpo permanece constante durante su deformación o movimiento.

4.3.1. Descripción material

Recordando que la densidad es igual a la masa por unidad de volumen, es decir $\rho = dm/dV$, se indica que la densidad de un punto material en la configuración de referencia $\rho_0 = \rho(\mathbf{X},0)$ y la densidad en la configuración actual $\rho_t = \rho(\mathbf{X},t)$ corresponden a:

$$\rho_0 = \frac{dm}{dV_0} \quad , \quad \rho_t = \frac{dm}{dV_t} \tag{4.17}$$

Reemplazando la Ecuación (3.122) en la expresión anterior se tiene que:

$$\frac{dV_t}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho_t} = \det \mathbf{F} \tag{4.18}$$

El principio de la conservación de la masa para cada partícula de un cuerpo material de volumen V_0 establece que:

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho_t(\mathbf{X}) \det \mathbf{F}(\mathbf{X},t) \quad \forall \mathbf{X} \in V_0 \tag{4.19}$$

4.3.2. Descripción espacial

Para un instante de tiempo *t*, la masa contenida en un volumen material V_t está dada en función de la descripción espacial de la densidad $\rho(\mathbf{x},t)$ de la forma:

$$\int_{V_t} \rho(\mathbf{x},t)dV \tag{4.20}$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la masa, la variación de esta última con respecto al tiempo debe ser nula, en otras palabras, la derivada material de la integral anterior es igual a cero como se indica a continuación:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho(\mathbf{x},t)dV = 0 \tag{4.21}$$

Aplicando la Ecuación (4.13) a un campo $\phi(\mathbf{x},t)=1$, se obtiene la *forma global del principio de la conservación de la masa en descripción espacial* como:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho\, dV = \int_{V_t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v})\right)dV = 0 \tag{4.22}$$

De igual manera, la expresión anterior es válida para una porción de volumen del cuerpo material, la cual puede ser tan pequeña que tienda a cero. En consecuencia, el resultado de integrar la expresión anterior en un volumen $\Delta V \to 0$ es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \tag{4.23}$$

Tal expresión corresponde a la *forma local del principio de la conservación de la masa en descripción espacial* o *ecuación de continuidad*.

4.4. Conservación de la cantidad de movimiento

El vector denominado *cantidad de movimiento* de un volumen infinitesimal dV está definido como el producto entre su masa $dm = \rho dV$ y su velocidad $\mathbf{v}$, de la forma $d\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} dV$. Por lo tanto la cantidad de movimiento de un cuerpo material de volumen V y masa m será igual a:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \tag{4.24}$$

De acuerdo con la *segunda ley de Newton* la fuerza aplicada sobre cuerpo es igual a $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, siendo $\mathbf{a}$ la *aceleración* definida en la Ecuación (3.7) como la derivada material en el tiempo de la velocidad $d\mathbf{v}/dt$. Recordando del principio de la conservación de la masa que $dm/dt = 0$, la fuerza $\mathbf{f}$ será igual a:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{4.25}$$

Sustituyendo la cantidad de movimiento de la Ecuación (4.24) en la Ecuación (4.25), se obtiene:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}dV \tag{4.26}$$

La ecuación anterior indica que la fuerza resultante sobre un cuerpo es igual a la derivada material en el tiempo de su cantidad de movimiento. Tal expresión se define como el *principio de la cantidad de movimiento*.

Sea un cuerpo sobre el cual actúan las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$ distribuidas en su contorno ∂V y las fuerzas de cuerpo $\rho\mathbf{b}$ distribuidas en su volumen *V*, como lo indica la Ecuación (2.21) la fuerza resultante es igual a:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V} \mathbf{t}^* dS + \int_V \rho\mathbf{b}dV \tag{4.27}$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}dV = \int_{\partial V} \mathbf{t}^* dS + \int_V \rho\mathbf{b}dV \tag{4.28}$$

Siendo la fuerza de superficie $\mathbf{t}^*$ igual al vector tracción $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ y aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie de tal forma que $\int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}dV$, la ecuación anterior será igual a:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}dV = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b})dV \tag{4.29}$$

Aplicando la Ecuación (4.16) a un campo $\phi = \mathbf{v}$, la derivada material de la integral de volumen indicada en el término a la izquierda de la ecuación anterior será igual a:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}\,dV = \int_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV = \int_V \rho\dot{\mathbf{v}}\,dV \tag{4.30}$$

donde $\dot{\mathbf{v}}$ corresponde al campo de la aceleración. En consecuencia, la *forma global del principio de conservación de la cantidad de movimiento* se expresa de la forma:

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV = \mathbf{0} \tag{4.31}$$

De igual manera, la expresión anterior es válida para una porción de volumen del cuerpo material, la cual puede ser tan pequeña que tienda a cero. Por lo tanto el resultado en notación compacta de integrar la expresión anterior en un volumen $\Delta V \to 0$ es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \tag{4.32}$$

y en notación indicial corresponde a:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j - \rho \dot{v}_j = 0 \quad \forall x_i \in V_t \tag{4.33}$$

Tal expresión corresponde a la *forma local del principio de conservación de la cantidad de movimiento en descripción espacial* o *ecuación de Cauchy*.

Cuando el campo de la velocidad es constante en el tiempo, es decir $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, la expresión anterior se reduce a la Ecuación (2.29) o *ecuación de equilibrio* de la forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \tag{4.34}$$

4.5. Conservación del momento de la cantidad de movimiento

El vector denominado *momento de la cantidad de movimiento* o *momentum angular* en una partícula está definido como el producto vectorial entre su posición $\mathbf{x}$ y su cantidad de movimiento $d\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} dV$. Por lo tanto el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento de un cuerpo material de volumen V y masa m será igual a:

$$\mathbf{x} \times m\mathbf{v} = \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV \tag{4.35}$$

De acuerdo con la *segunda ley de Newton* el momento aplicado sobre el cuerpo es igual a $\mathbf{x}\times m\mathbf{a}$. Sustituyendo la aceleración por $\dot{\mathbf{v}}$ y recordando del principio de la conservación de la masa que $dm/dt=0$, se tiene que:

$$\mathbf{x}\times m\mathbf{a}=\mathbf{x}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times m\mathbf{v}) \tag{4.36}$$

Reemplazando la cantidad de movimiento de la Ecuación (4.24) en la Ecuación (4.25) se obtiene:

$$\mathbf{x}\times m\mathbf{a}=\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}dV \tag{4.37}$$

La ecuación anterior indica que el momento resultante sobre un cuerpo es igual a la derivada material en el tiempo del momento de su cantidad de movimiento. Tal expresión se define como el *principio del momento de la cantidad de movimiento*.

Sea un cuerpo sobre el cual actúan las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$ distribuidas en su contorno ∂V y las fuerzas de cuerpo $\rho\mathbf{b}$ distribuidas en su volumen *V*, el momento resultante es igual a:

$$\mathbf{x}\times m\mathbf{a}=\underbrace{\int_{\partial V}\mathbf{x}\times\mathbf{t}^* dS}_{\text{producido por fuerzas de superficie}}+\underbrace{\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}dV}_{\text{producido por fuerzas de cuerpo}} \tag{4.38}$$

Por lo tanto la derivada temporal del momento en notación compacta y en notación indicial son:

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}dV=\int_{\partial V}\mathbf{x}\times\mathbf{t}^* dS+\int_V \mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}dV \tag{4.39}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\tilde{p}_{jpq}x_p v_q dV=\int_{\partial V}\tilde{p}_{jpq}x_p t_q^* dS+\int_V \rho\tilde{p}_{jpq}x_p b_q dV \tag{4.40}$$

Considerando que el punto *O* está ubicado en el origen del sistema coordenado de vectores base $\mathbf{e}_j$ y que $t_j^*=t_j^{(n)}=n_i\sigma_{ij}$, la ecuación resulta de la forma:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\tilde{p}_{jpq}x_p v_q dV=\int_{\partial V}\tilde{p}_{jpq}x_p n_r\sigma_{rq} dS+\int_V \rho\tilde{p}_{jpq}x_p b_q dV \tag{4.41}$$

Aplicando de nuevo el teorema de la divergencia al tensor de tercer orden $x_p\sigma_{rq}$, la integral de superficie del primer término a la derecha de la ecuación anterior se transforma en una integral de volumen de la forma:

$$\int_{\partial V} \tilde{p}_{jpq} x_p n_r \sigma_{rq} dS = \int_V \tilde{p}_{jpq} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) dV \tag{4.42}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (4.41) se tiene una ecuación de equilibrio sobre un volumen V de la forma:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \tilde{p}_{jpq} x_p v_q dV = \int_V \tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) + \rho x_p b_q \right\} dV \tag{4.43}$$

Aplicando la Ecuación (4.16) a un campo $\phi = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$, la derivada material de la integral de volumen indicada en el término a la izquierda en la ecuación anterior será igual a:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \tilde{p}_{jpq} x_p v_q dV = \int_V \rho \tilde{p}_{jpq} \frac{d}{dt}\left(x_p v_q\right) dV \tag{4.44}$$

Por lo tanto,

$$\int_V \tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) + \rho x_p b_q - \rho \frac{d}{dt}\left(x_p v_q\right) \right\} dV = 0 \tag{4.45}$$

La expresión anterior se denomina *forma global del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento*.

De igual manera, la expresión anterior es válida para una porción de volumen del cuerpo material, la cual puede ser tan pequeña que tienda a cero. Por lo tanto el resultado de integrar la expresión anterior en un volumen $\Delta V \to 0$ es:

$$\tilde{p}_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) + \rho x_p b_q - \rho \frac{d}{dt}\left(x_p v_q\right) \right\} = 0 \quad \forall x_p \in V_t \tag{4.46}$$

El primero y el último término entre paréntesis de la ecuación previa corresponden a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p \sigma_{rq}\right) &= \delta_{pr} \sigma_{rq} + x_p \frac{\partial \sigma_{rq}}{\partial x_r} \\ \rho \frac{d}{dt}\left(x_p v_q\right) &= \rho x_p \frac{d v_q}{dt} + \rho v_p v_q \end{aligned} \tag{4.47}$$

Siendo $\delta_{pr}\sigma_{rq} = \sigma_{pq}$ y sustituyendo los resultados anteriores en la Ecuación (4.46) se obtiene:

$$\tilde{p}_{jpq} \left\{ \sigma_{pq} + x_p \left(\frac{\partial \sigma_{rq}}{\partial x_r} + \rho b_q - \rho \frac{d v_q}{dt} \right) - \rho v_p v_q \right\} = 0 \tag{4.48}$$

Recordando que el producto vectorial $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=\tilde{p}_{jpq}v_p v_q \mathbf{e}_j=\mathbf{0}$ y que la forma local del principio de conservación de la cantidad de movimiento es igual a:

$$\frac{\partial\sigma_{rq}}{\partial x_r}+\rho b_q-\rho\frac{dv_q}{dt}=0 \tag{4.49}$$

La Ecuación (4.48) se reduce a:

$$\tilde{p}_{jpq}\sigma_{pq}=0\rightarrow\sigma_{pq}=\sigma_{qp} \tag{4.50}$$

Esta última expresión se denomina *forma local del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento* y establece la simetría del tensor de esfuerzos.

4.6. Conservación de la energía

El *principio de conservación de la energía* establece que la derivada material en el tiempo de la suma entre la *energía cinética* y la *energía interna* es igual a la *potencia mecánica* asociada a las fuerzas másicas y de superficie, más la derivada material en el tiempo de *otras energías* que entran o permanecen en el cuerpo. Las demás energías se originan por fenómenos térmicos, eléctricos, magnéticos o químicos que puedan actuar sobre el cuerpo. Siendo la energía una cantidad escalar, el principio de la conservación de la energía se puede plantear mediante la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}(K+U)=\dot{K}+\dot{U}=P+Q \tag{4.51}$$

donde K es la energía cinética, U es la energía interna, P es la potencia mecánica y Q es la derivada temporal material de las otras energías.

La *energía cinética* K de un cuerpo material que ocupa un volumen V corresponde a la generalización en el medio continuo de la expresión discreta escalar $\frac{1}{2}mv^2$, donde $v=\|\mathbf{v}\|$. Se define la energía cinética en notación compacta e indicial de la forma:

$$K = \int_V \tfrac{1}{2}\rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dV$$
$$K = \int_V \tfrac{1}{2}\rho v_i v_i\, dV \tag{4.52}$$

siendo ρ la densidad y $\mathbf{v}$ el campo de la velocidad en un punto material contenido en el cuerpo. De acuerdo con la Ecuación (4.16), la derivada material en el tiempo de la energía cinética es igual a:

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}\rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dV = \int_V \tfrac{1}{2}\rho \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})dV \tag{4.53}$$

dado que $d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/dt = 2\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$, la expresión anterior en notación compacta e indicial se reduce a:

$$\dot{K} = \int_V \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\,dV$$
$$\dot{K} = \int_V \rho\dot{v}_i v_i\, dV \tag{4.54}$$

La *energía interna U* del cuerpo es igual a la integral en el volumen *V* de la *energía interna por unidad de volumen* ρu. Por lo tanto la energía interna se puede expresar como:

$$U = \int_V \rho u dV \tag{4.55}$$

El escalar *u* se denomina *energía interna específica* o *densidad de energía* y corresponde a la energía interna por unidad de masa.

La derivada material en el tiempo de la energía interna se obtiene aplicado la Ecuación (4.16) de la forma:

$$\dot{U} = \int_V \rho\dot{u}dV \tag{4.56}$$

siendo $\dot{u}$ la derivada temporal material de la densidad de energía.

La *potencia mecánica P* se define como la variación en el tiempo o *tasa* del trabajo realizado por las fuerzas másicas $\rho\mathbf{b}$ y por las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$ actuantes en el cuerpo material, es decir:

$$P = \int_{\partial V} \mathbf{t}^*\cdot\mathbf{v}dS + \int_V \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV \tag{4.57}$$

La fuerza de superficie es igual a un vector tracción actuando sobre el contorno del cuerpo, es decir $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Aplicando el teorema de la divergencia, la integral de superficie de la ecuación anterior

$\int_{\partial V}\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})dS$ se puede expresar como una integral de volumen de la forma $\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})dV$. En consecuencia la potencia mecánica será igual a:

$$P=\int_V[\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})+\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}]dV=\int_V[(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v}+(\mathbf{v}\otimes\nabla):\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}]dV$$
$$P=\int_V\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ji}v_i)+\rho b_i v_i\right]dV=\int_V\left[\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}v_i+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}+\rho b_i v_i\right]dV \quad (4.58)$$

La energía cinética, la energía interna y la potencia mecánica de las expresiones (4.54), (4.56) y (4.58) respectivamente, se sustituyen en la Ecuación (4.51) obteniendo:

$$\int_V\rho\dot{v}_i v_i\,dV+\int_V\rho\dot{u}\,dV=\int_V\left[\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}v_i+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}+\rho b_i v_i\right]dV+Q \quad (4.59)$$

Reordenando los términos se puede escribir que:

$$-\int_V\left[\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho b_i-\rho\dot{v}_i\right]v_i\,dV+\int_V\left[\rho\dot{u}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}\right]dV=Q \quad (4.60)$$

La primera integral del lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a cero de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento. En consecuencia:

$$\int_V\left(\rho\dot{u}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}\right)dV=Q$$
$$\int_V(\rho\dot{u}-(\mathbf{v}\otimes\nabla):\boldsymbol{\sigma})dV=Q \quad (4.61)$$

El tensor de segundo orden obtenido del producto diádico $\mathbf{v}\otimes\nabla$ se puede escribir como la suma entre su parte simétrica y su parte antisimétrica, así:

$$\mathbf{v}\otimes\nabla=\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{v})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}\otimes\nabla-\nabla\otimes\mathbf{v})$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (4.62)$$

Como se presenta en la siguiente ecuación, el primer término a la derecha de la igualdad anterior se denomina gradiente simétrico de **v** y se indica como: $\mathbf{D}=\nabla^s\mathbf{v}$. En cambio el segundo término corresponde al gradiente antisimétrico de **v** denotado como $\mathbf{W}=\nabla^a\mathbf{v}$.

$$\mathbf{D} = \nabla^s \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}) \qquad \mathbf{W} = \nabla^a \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{v})$$
$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.63}$$

Siendo simétrico el tensor de esfuerzos, el producto doblemente contraído $(\mathbf{v} \otimes \nabla) : \boldsymbol{\sigma}$ es igual al producto $(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}$ y en consecuencia $\mathbf{W} : \boldsymbol{\sigma} = 0$. El segundo término a la izquierda de la igualdad (4.61) que representa el trabajo realizado por el esfuerzo, será igual a:

$$(\mathbf{v} \otimes \nabla) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{W} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \tag{4.64}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (4.61) se obtiene la *forma global de la ecuación de conservación de la energía*, presentada en notación compacta e indicial como:

$$\int_V (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) dV = Q$$
$$\int_V (\rho \dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij}) dV = Q \tag{4.65}$$

Despreciando la energía producida por otros tipos de fenómenos, es decir suponiendo que $Q = 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$\int_V (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) dV = 0$$
$$\int_V (\rho \dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij}) dV = 0 \tag{4.66}$$

y se denomina la *forma global de la ecuación de conservación de la energía mecánica*.

De igual manera, la expresión anterior es válida para una porción de volumen del cuerpo material, la cual puede ser tan pequeña que tienda a cero. Por lo tanto, el resultado de integrar la expresión anterior en un volumen $\Delta V \to 0$ es:

$$\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0$$
$$\rho \dot{u} - \sigma_{ij} D_{ij} = 0 \tag{4.67}$$

La expresión anterior corresponde a la *forma local de la ecuación de conservación de la energía mecánica*, la cual establece que la tasa de energía interna por unidad de volumen es igual a la *tasa del trabajo hecho por el esfuerzo*, es decir $\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$.

El tensor gradiente simétrico de la velocidad puede escribirse en función de la derivada temporal del campo del desplazamiento de la forma $\mathbf{D} = \nabla^s \mathbf{v} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}$.

Considerando que los desplazamientos y las deformaciones son pequeñas como lo establece la teoría de deformación infinitesimal, el gradiente simétrico $\dot{\mathbf{u}}$ es igual a la derivada temporal material del tensor de deformación infinitesimal, es decir:

$$\mathbf{D} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}\right) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.68}$$

Reemplazando el resultado anterior en la Ecuación (4.67) se tiene que:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.69}$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.57), (4.67) y (4.53) en la Ecuación (4.51) y considerando que $\dot{\mathbf{v}} = 0$ y $Q = 0$, se obtiene:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v}\, dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\, dV \tag{4.70}$$

Tal ecuación es matemáticamente similar al *principio de los trabajos virtuales*.

4.7. Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales es el primer principio variacional aplicable a la mecánica del medio continuo y el análisis estructural.

La posición de todas las partículas de un cuerpo material en un instante de tiempo se denomina *configuración*. Se definen como *configuraciones admisibles* al conjunto de configuraciones que satisfacen las condiciones de borde cinemáticas de un cuerpo. De todas las configuraciones admisibles, solo una de ellas, denominada *configuración verdadera*, responde a la condición de equilibrio de un cuerpo sometido a fuerzas reales.

Las configuraciones admisibles están restringidas a la vecindad de la configuración verdadera, por lo tanto se obtienen de *variaciones infinitesimales* o simplemente *variaciones* de dicha configuración.

Las variaciones dadas por las configuraciones admisibles que además cumplen con las condiciones de equilibrio en un cuerpo material se denominan *desplazamientos virtuales*. Tales desplazamientos

corresponden a valores arbitrarios mientras actúan valores fijos de las fuerzas reales en el cuerpo.

El trabajo realizado por las fuerzas reales durante un desplazamiento virtual en la configuración real se denomina *trabajo virtual* hecho por las fuerzas reales y se define como:

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \tag{4.71}$$

donde **f** es el vector fuerza constante real y $\delta \mathbf{u}$ corresponde al vector desplazamiento virtual.

En cuerpos deformables, el trabajo virtual hecho por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual hecho por las fuerzas internas δW_I denominado *trabajo virtual interno* y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas δW_E llamado *trabajo virtual externo*.

Sea un cuerpo de volumen V y de superficie de contorno ∂V, sujeto a las fuerzas de cuerpo $\rho \mathbf{b}$ por unidad de volumen y a las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$ por unidad de área aplicadas sobre el contorno $\Gamma_t \subset \partial V$. Las condiciones de borde sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido $\Gamma_u \subset \partial V$.

El campo del desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$, definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con la condición de borde de la forma:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{4.72}$$

El *trabajo virtual externo*, es decir, aquel realizado por las fuerzas reales externas $\rho \mathbf{b}$ y $\mathbf{t}^*$ mientras se presenta un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$ es igual a:

$$\delta W_E = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \tag{4.73}$$

En respuesta a la aplicación de las cargas externas, el cuerpo desarrolla acciones internas representadas por los esfuerzos. Tales esfuerzos también realizan un trabajo cuando se da un desplazamiento virtual del cuerpo.

Como se indicó en el apartado anterior, la tasa del trabajo hecho por el esfuerzo asociado a desplazamientos reales por unidad de volumen es igual a la tasa de la densidad de energía interna, es decir $\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \dot{\mathbf{u}}$. De manera análoga, el *trabajo virtual interno por unidad de volumen* es igual al trabajo realizado por el esfuerzo asociado a desplazamientos

virtuales por unidad de volumen, es decir $\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}$. Por lo tanto el *trabajo virtual interno* almacenado en el cuerpo está definido como:

$$\delta W_I = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \, dV \tag{4.74}$$

El *principio de los trabajos virtuales* establece que un cuerpo está en *equilibrio* si y solo si, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir, $\delta W = -\delta W_E + \delta W_I = 0$. Sustituyendo las expresiones (4.73) y (4.74) en la expresión anterior se obtiene *la ecuación del principio de los trabajos virtuales* de la forma:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV \tag{4.75}$$

la cual es válida para todo campo de desplazamientos virtuales que cumpla con las condiciones de borde cinemáticas, es decir $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$.

Observación. *La ecuación del principio de los trabajos virtuales es independiente de la ecuación constitutiva del material y de la teoría de deformación o cinemática utilizada, lo cual le proporciona validez general en la mecánica del medio continuo.*

Observación. *Para obtener de forma rigurosa la ecuación del principio de los trabajos virtuales es necesario aplicar algunos elementos del cálculo de variaciones básicos en la definición de todo principio variacional (Lanczos 1970).*

Si ahora se incluye el trabajo realizado por las fuerzas inerciales con aceleración **a**, como parte del trabajo virtual externo se tiene que:

$$\begin{aligned} &\int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_V \rho \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ &\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{aligned} \tag{4.76}$$

La expresión anterior se aplica a problemas dinámicos y se denomina *principio de d'Alembert*.

Las componentes con respecto a la base $\mathbf{e}_i$ del tensor de segundo orden resultante del gradiente simétrico del desplazamiento virtual se presentan en notación indicial como:

$$\nabla^s \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{4.77}$$

En cambio, las componentes de dicho tensor se representan en notación de Voigt mediante una matriz columna de la forma:

$$\{\nabla^s \delta\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \partial\delta u_1 / \partial x_1 \\ \partial\delta u_2 / \partial x_2 \\ \partial\delta u_3 / \partial x_3 \\ \partial\delta u_2 / \partial x_3 + \partial\delta u_3 / \partial x_2 \\ \partial\delta u_1 / \partial x_3 + \partial\delta u_3 / \partial x_1 \\ \partial\delta u_1 / \partial x_2 + \partial\delta u_2 / \partial x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= [\partial]\{\delta\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

donde los tres últimos términos están multiplicados por 2, con el fin de asegurar la equivalencia entre la operación tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta\mathbf{u}$ y la operación matricial $\{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\partial] \{\delta\mathbf{u}\}$, como se explicó en el Apartado 1.6.8.

Por lo tanto, la Ecuación (4.75) se puede expresar en notación de Voigt de la forma:

$$\int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\partial] \{\delta\mathbf{u}\} dV = \int_{\Gamma_t} \{\mathbf{t}^*\}^T \{\delta\mathbf{u}\} dS + \int_V \rho \{\mathbf{b}\}^T \{\delta\mathbf{u}\} dV \tag{4.79}$$

siendo,

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T \\ \{\mathbf{t}^*\} &= [t_1^* \quad t_2^* \quad t_3^*]^T \\ \{\mathbf{b}\} &= [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T \\ \{\delta\mathbf{u}\} &= [\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3]^T \end{aligned} \tag{4.80}$$

Capítulo 5
Modelo constitutivo de un material elástico lineal

En los capítulos anteriores se ha descrito de forma independiente el campo de los esfuerzos y de las deformaciones de un cuerpo. En este capítulo se relacionan tales entidades mecánicas del material a través de los modelos constitutivos, considerando específicamente un comportamiento lineal y elástico del material (Lubliner 1990; Lemaitre 1992; Maugin 1992; Simó & Hughes 1998; Runesson 1999; Holzapfel 2000; William 2002; Kachanov 2004; Kojic & Bathe 2005).

El primer apartado indica brevemente las características generales de los modelos constitutivos y su clasificación actual según algunos autores (Runesson, Ottosen et al. 1991; William 2002). Las siguientes secciones describen en detalle el modelo constitutivo para materiales elásticos lineales isótropos, definido por la generalización de la ley de Hooke.

Al final del capítulo se presenta la relación entre el campo de los esfuerzos y el campo de las deformaciones para el estado plano de esfuerzos y el estado plano de deformaciones, obtenida como una simplificación del problema tridimensional.

5.1. Modelos constitutivos

El comportamiento mecánico real de los materiales es bastante complejo, sin embargo es posible establecer la relación entre el esfuerzo y la deformación durante el proceso de carga mediante modelos matemáticos denominados *modelos constitutivos*. La aplicación de dichos modelos

depende del orden de magnitud de la deformación y de las características mecánicas del material, entre otras.

Los modelos constitutivos describen el comportamiento de un material bajo diferentes acciones, principalmente mecánicas. La respuesta mecánica de los materiales está expresada en términos del esfuerzo, la deformación y las *variables internas*. Estas últimas describen el efecto de la historia de carga sobre las propiedades actuales.

En general los modelos constitutivos están formados por la ecuación constitutiva, el criterio de fluencia o de fractura, las leyes de evolución y las condiciones de carga y descarga.

La *ecuación constitutiva* es la expresión que define al esfuerzo (o el incremento del esfuerzo) en función de la deformación (o del incremento de la deformación), en un instante de tiempo y para todo punto material.

El *criterio de fluencia o de fractura* establece la condición límite para la cual el estado de esfuerzos o de deformaciones de una partícula describe un comportamiento elástico. Para los materiales dúctiles tal condición se denomina *criterio de fluencia* y para materiales frágiles se llama *criterio de fractura*.

Las *leyes de evolución* son expresiones que definen la historia en el tiempo de las variables internas del modelo constitutivo. Como su nombre lo indica, las condiciones de carga y descarga establecen cuando un punto material se encuentra en régimen de carga o descarga.

A pesar de la diversidad en la representación del comportamiento mecánico de un material, a continuación se indican algunas características indispensables de todo modelo constitutivo:

- *Homogeneidad dimensional*. La dimensión de cada uno de los términos de la relación constitutiva debe ser la misma.

- *Sistema coordenado indiferente*. Aunque se pueda expresar con respecto a un sistema coordenado específico, las relaciones constitutivas son independientes del sistema coordenado escogido.

- *Objetividad material*. Las relaciones constitutivas no cambian con respecto a la traslación y rotación del marco de referencia. Por ejemplo, el movimiento de sólido rígido no afecta su estado de esfuerzos.

Históricamente los modelos constitutivos se han desarrollado ausentes de un criterio unificado; en la actualidad es posible clasificarlos de acuerdo con su metodología de aproximación y su formulación

matemática. Según el método de aproximación utilizado, los modelos constitutivos se pueden catalogar como:

- *Metodología de aproximación micromecánica*. La relación constitutiva se deriva del comportamiento micromecánico o microestructural del material. Asimismo, el modelo macroscópico asociado se obtiene a través de métodos que muestran el comportamiento promedio como la *teoría de mezclas* o las técnicas de *homogenización* (Truesdell & Toupin 1960; Oller 2003). Está metodología ha permitido estudiar el comportamiento de estructuras de materiales compuestos como el concreto reforzado y la mampostería estructural (Vecchio & Collins 1986; Feenstra & de Borst 1995; Pietruszczak & Winnicki 2003; Linero, Oliver et al. 2007). En algunos casos se puede aprovechar la periodicidad de la microestructura de un material para reducir el problema al análisis del comportamiento de una celda unitaria (Böhm 2000).

- *Metodología de aproximación fenomenológica.* El modelo macroscópico se establece directamente de la observación del comportamiento del material en ensayos de laboratorio sencillos. La calibración del modelo se obtiene principalmente por comparación con los resultados experimentales o mediante predicciones micromecánicas. Los argumentos de la relación constitutiva son las variables observables como el esfuerzo, la deformación y la temperatura, y además las variables no observables necesarias para definir el modelo. Mediante la metodología de aproximación fenomenológica se definen entre otros, los modelos de daño y de plasticidad, los cuales predicen adecuadamente el comportamiento del concreto simple y del acero estructural (Kachanov 1986; Lubliner 1990; Lemaitre 1992; Simó & Hughes 1998; Luccioni 2003; Kachanov 2004).

- *Metodología de aproximación estadística.* Los modelos estadísticos para describir el comportamiento del material son establecidos como funciones de respuesta para cargas y condiciones ambientales específicas.

Los tipos de formulación matemática utilizados para obtener las relaciones constitutivas son los siguientes:

- El *formato algebraico* relaciona los tensores de esfuerzo y deformación mediante una expresión polinómica $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon})$. Este formato está limitado a modelos constitutivos independientes del tiempo y de la historia de carga, como los sistemas elásticos lineales y no lineales sin histéresis. La relación constitutiva de un modelo *elástico lineal* está dada de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ donde $\mathbf{C}$ es un tensor de cuarto orden denominado *tensor constitutivo elástico* y depende de las constantes elásticas del material. Con el mismo formato, la relación constitutiva de los modelos no lineales se puede escribir como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\sec} : \boldsymbol{\varepsilon}$, siendo $\mathbf{C}^{\sec}$ el *tensor constitutivo secante*, el cual depende de constantes elásticas definidas por funciones no lineales. Otro formato algebraico aplicado al modelo de *elasticidad de Cauchy* establece que el estado de esfuerzos es una función tensorial de segundo orden (no lineal) del tensor de deformación de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{1} + \beta \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^2$ o $\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{1} + \beta \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$, siendo α, β, δ cantidades escalares.

- El *formato integral* es una representación funcional donde las componentes del tensor de esfuerzo son el resultado de las derivadas parciales de un potencial $W(\varepsilon_{ij})$ con respecto a las componentes de deformación, es decir $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$.

- El *formato diferencial* establece una relación constitutiva tangente de la forma $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\tan} : d\boldsymbol{\varepsilon}$, definida a partir de elementos diferenciales de esfuerzo $d\boldsymbol{\sigma}$ y de deformación $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Este formato permite almacenar las variables internas las cuales memorizan los cambios inelásticos de las propiedades materiales.

Las metodologías de aproximación micromecánica y estadística, y los formatos integral y diferencial, al igual que los modelos constitutivos no lineales, están fuera del alcance de este libro. En los siguientes apartados se describe un modelo constitutivo de *elasticidad lineal* el cual está definido por la *ley de Hooke generalizada*.

El modelo constitutivo define el estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}^P, t^m)$ de una partícula *P* ubicada en la posición $\mathbf{X}^P$ de la configuración de referencia y en un instante de tiempo t^m. Sin embargo, existen modelos donde tal esfuerzo depende de las variables de estado en el instante anterior o de los puntos materiales en la vecindad de la partícula *P*. A continuación se indican dichos modelos:

- Los *modelos independientes de su historia*[6] son aquellos donde el estado de esfuerzos en un instante de tiempo específico depende exclusivamente del estado de deformaciones en el mismo instante. En cambio, los *modelos dependientes de su historia o modelos con viscosidad*[7] definen el estado de esfuerzos en función de las deformaciones en el mismo instante de tiempo y en los instantes anteriores.

- En los *modelos constitutivos locales* el esfuerzo en un punto material depende exclusivamente del estado de deformaciones de dicho punto. A diferencia de *los modelos constitutivos no locales*, en los cuales el estado de esfuerzos en una partícula depende de la deformación en el mismo punto y en los puntos a su alrededor.

5.2. Material elástico

Elasticidad es la propiedad física de un sólido de regresar a su configuración de referencia después de retiradas las acciones impuestas sobre él, en otras palabras, no hay deformación en el sólido después de la descarga. Un material se denomina *elástico* si cumple con tal propiedad y además el tensor de esfuerzos es una función única del tensor de deformaciones, como lo indica la **Figura 5.1(a)-(b)**.

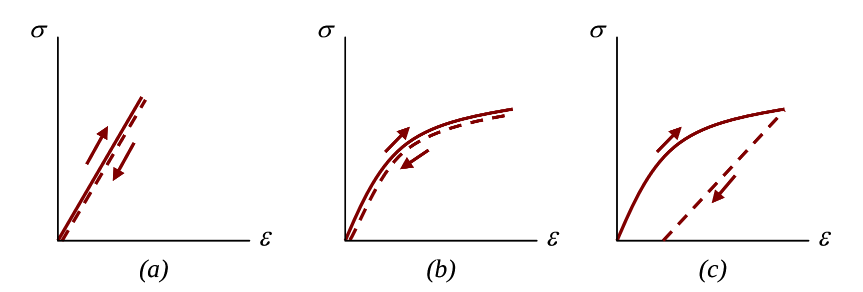


Figura 5.1. Relación uniaxial esfuerzo-deformación en carga y descarga: (a) material elástico lineal, (b) material elástico no lineal, (c) material inelástico.

[6] Los modelos constitutivos independientes de su historia corresponden al vocablo inglés *rate-independent models*.
[7] Los modelos constitutivos independientes de su historia corresponden al vocablo inglés *rate-dependent models*.

En cambio un material se define como *inelástico* si después de la descarga existe una deformación permanente de la forma indicada en la **Figura 5.1(c)**. El proceso de carga y descarga es reversible en materiales elásticos y es irreversible en materiales inelásticos.

Los modelos generales definidos por una relación constitutiva que representa el comportamiento del *material elástico* y por una medida de deformación que describe la cinemática del sólido, son los siguientes:

- En el *Modelo hipoelástico*, la relación constitutiva del material no es lineal y no cumple las leyes de la termodinámica. Además se considera el campo de deformaciones infinitesimales como medida de deformación.

- En el *Modelo hiperelástico*, la relación constitutiva del material no es lineal y se rige por las leyes de la termodinámica. Además se considera un campo no lineal de deformaciones como medida de deformación.

- El *Modelo Hookeano* considera una relación constitutiva lineal del material y un campo de pequeñas deformaciones y grandes rotaciones del sólido. A pesar que el material es lineal, el problema mecánico no es lineal debido a las grandes rotaciones consideradas en el sólido.

- El *Modelo elástico lineal* considera una relación constitutiva lineal del material y un campo de deformaciones infinitesimales del sólido. El problema mecánico es de carácter lineal.

***Observación**. Es importante recordar que el tensor de deformación infinitesimal es una medida lineal de la deformación porque mantiene una relación estrictamente lineal con el tensor gradiente de desplazamiento.*

Como se indicó en el capítulo anterior, la forma local de la ecuación de conservación de la energía mecánica considerando la teoría de deformación infinitesimal corresponde a:

$$\rho\dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \rho\dot{u} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{5.1}$$

donde $\dot{u}$ es la derivada temporal de la *energía de deformación por unidad de masa*. El tensor de esfuerzos es $\boldsymbol{\sigma}$ y la derivada temporal del tensor de deformaciones infinitesimales es $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Para materiales elásticos la densidad de energía de deformación (por unidad de masa) es función exclusivamente del campo de las deformaciones, es decir $u = u(\boldsymbol{\varepsilon})$, por lo tanto, su derivada con respecto al tiempo es igual a:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{5.2}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (5.1) se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{5.3}$$

Se define a la *energía de deformación por unidad de volumen* de la forma:

$$\hat{u} = \rho_0 u \tag{5.4}$$

siendo ρ_0 la densidad del material en la configuración de referencia. De acuerdo con el principio de la conservación de la masa $\rho_0 = \rho \det F_{ij}$, sin embargo al considerar que los gradientes de desplazamiento son pequeños con respecto a la unidad $\det F_{ij} \cong 1 + \partial u_i / \partial X_i = 1$ y por lo tanto $\rho_0 = \rho$. En consecuencia, las componentes del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{5.5}$$

Lo anterior establece la existencia de una función de energía de deformación por unidad de volumen $\hat{u}(\varepsilon_{ij})$ cuyas derivadas con respecto a las componentes del tensor deformación infinitesimal son iguales a las componentes del tensor de esfuerzo.

5.3. Material elástico lineal

Para un *material elástico lineal* se establece que el campo tensorial de esfuerzos es una función lineal del campo de deformaciones. Asimismo, considera que los gradientes de desplazamiento son pequeños con respecto a la unidad, de tal forma que las medidas de deformación de Green y de Almansi coinciden con el tensor de deformación infinitesimal.

Para muchos problemas de ingeniería el modelo elástico lineal ofrece resultados satisfactorios, tal es el caso de estructuras bajo cargas de servicio con materiales como el concreto y el acero.

5.3.1. Ecuación constitutiva de elasticidad lineal

Aplicando el teorema de Taylor para tensores indicado en la Ecuación (3.19), la función energía de deformación por unidad de volumen alrededor de $\varepsilon_{ij}=0$ se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned}\hat{u}\left(\varepsilon_{ij}\right) &= \hat{u}(0)+\frac{\partial \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{pq}}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{pq}+\\ &+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{pq}\partial \varepsilon_{rs}}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}+\dots\end{aligned} \tag{5.6}$$

Derivando la expresión anterior como se indica en la Ecuación (5.5), se tiene que las componentes del tensor de esfuerzo son iguales a:

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{rs}}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{rs}+\dots \tag{5.7}$$

Despreciando los términos no lineales con respecto a ε_{kl} y suponiendo que el tensor de esfuerzos es igual a cero cuando el estado de deformaciones es nulo, es decir, $\sigma_{ij}(0)=\partial \hat{u}(0)/\partial \varepsilon_{ij}=0$, se obtiene una relación tensorial lineal entre el esfuerzo y la deformación de la forma:

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl} \tag{5.8}$$

donde la segunda derivada de $\hat{u}$ con respecto al tensor deformación evaluada en $\varepsilon_{ij}=0$ es un tensor de cuarto orden denominado *tensor constitutivo elástico* y definido como:

$$C_{ijkl}=\frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} \tag{5.9}$$

Por lo tanto, se define la *ecuación constitutiva de un material elástico lineal* o *ley de Hooke generalizada* en notación indicial y compacta como:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\\ \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}\end{gathered} \tag{5.10}$$

5.3.2. Tensor constitutivo elástico

En un sistema coordenado definido por los vectores base $\mathbf{e}_i$, el tensor constitutivo elástico es igual a $\mathbf{C} = C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad i,j,k,l = \{1,2,3\}$, donde C_{ijkl} corresponde $3^4 = 81$ componentes del tensor, denominadas *constantes elásticas del material*. Sin embargo, debido a las siguientes características de simetría, algunas componentes del tensor son las mismas reduciendo el número de coeficientes diferentes.

Siendo $\hat{u}$ una función continua, su segunda derivada con respecto a la deformación puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \hat{u}(0)}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \tag{5.11}$$

y por lo tanto $C_{ijkl} = C_{klij}$, lo cual demuestra la *simetría menor* del tensor constitutivo elástico.

Dado que los tensores de esfuerzos y de deformaciones son simétricos se puede indicar que el tensor constitutivo elástico cuenta con *simetría mayor*, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad &, \quad \sigma_{ji} = C_{jikl}\varepsilon_{kl} \quad \rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad &, \quad \sigma_{ij} = C_{ijlk}\varepsilon_{lk} \quad \rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{aligned} \tag{5.12}$$

En consecuencia, de los 81 componentes del tensor $\mathbf{C}$ solamente 21 son distintos.

Sean $\bar{\varepsilon}_{pq}$ y $\bar{\sigma}_{rs}$ las componentes de los tensores de deformación y de esfuerzo respectivamente con respecto al sistema coordenado de vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i = M_{ip}\mathbf{e}_p$. La ecuación constitutiva elástica lineal se puede escribir de la forma:

$$\bar{\sigma}_{pq} = \bar{C}_{pqrs}\bar{\varepsilon}_{rs} \tag{5.13}$$

donde $\bar{C}_{pqrs}$ son las componentes del tensor $\mathbf{C}$ con respecto a los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$, es decir $\mathbf{C} = \bar{C}_{pqrs}\bar{\mathbf{e}}_p \otimes \bar{\mathbf{e}}_q \otimes \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_s$.

De acuerdo con la ley de transformación de componentes de tensores de segundo orden se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{pq} &= M_{pi}M_{qj}\sigma_{ij} \\ \varepsilon_{kl} &= M_{rk}M_{sl}\bar{\varepsilon}_{rs} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Sustituyendo la Ecuación (5.10) y las expresiones anteriores en la Ecuación (5.13) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{pq} &= \bar{C}_{pqrs}\bar{\varepsilon}_{rs} = M_{pi}M_{qj}\sigma_{ij} = M_{pi}M_{qj}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \bar{\sigma}_{pq} &== M_{pi}M_{qj}C_{ijkl}M_{rk}M_{sl}\bar{\varepsilon}_{rs} = M_{pi}M_{qj}M_{rk}M_{sl}C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{rs}\end{aligned} \tag{5.15}$$

Por lo tanto, las componentes del tensor constitutivo elástico $\bar{C}_{pqrs}$ con respecto al sistema coordenado dado por los vectores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ en función de las componentes C_{ijkl} con respecto a los vectores base $\mathbf{e}_i$ es igual a:

$$\bar{C}_{pqrs} = M_{pi}M_{qj}M_{rk}M_{sl}C_{ijkl} \tag{5.16}$$

5.3.3. Ecuación constitutiva de elasticidad lineal en notación de Voigt

Como se indicó en el Apartado 1.6.8, las componentes de un tensor simétrico de cuarto orden se pueden expresar mediante una matriz cuadrada tamaño 6.

De acuerdo con la simetría de **C** y la ecuación constitutiva de elasticidad lineal $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, las componentes del tensor de esfuerzos corresponden a:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij33}\varepsilon_{33} + \\ &+ 2C_{ij23}\varepsilon_{23} + 2C_{ij13}\varepsilon_{13} + 2C_{ij12}\varepsilon_{12}\end{aligned} \tag{5.17}$$

El mismo resultado se obtiene de la operación matricial definida como:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{5.18}$$

recordando que los tensores de esfuerzos y de deformación se representan en notación de Voigt como matrices columna de la forma:

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}]^T\end{aligned} \tag{5.19}$$

y estableciendo que $[\mathbf{C}]$ es una matriz de 6 por 6 que contiene las componentes del tensor constitutivo elástico también en notación de Voigt, tal que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & & & C_{1313} & C_{1312} \\ sim & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

5.4. Material elástico lineal isótropo

En general un material es *isótropo* si sus propiedades son iguales para cualquier dirección o en otras palabras, tiene infinitos planos ortogonales de simetría. En cambio, un material es *anisótropo* si sus propiedades dependen de la dirección en la cual es medida y en consecuencia no tienen ningún plano ortogonal de simetría. El material *ortótropo* es aquel que cuenta con 2 o 3 planos ortogonales de simetría en los cuales las propiedades son independientes de la dirección. Si una placa o membrana tiene propiedades iguales en todas las direcciones contenidas en el plano de la misma, pero sus propiedades son diferentes en la dirección perpendicular a su plano, el material que la constituye se denomina *isótropo transversal*.

5.4.1. Tensor constitutivo elástico y ecuación constitutiva

Un material elástico lineal es isótropo si las componentes del tensor constitutivo elástico son las mismas para cualquier sistema coordenado de referencia, es decir $\overline{C}_{ijkl} = C_{ijkl} \quad \forall \bar{\mathbf{e}}_i$. Tal característica establece que el tensor **C** de un material *isótropo* corresponde a un tensor de cuarto orden *isótropo* de la forma:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \eta\delta_{il}\delta_{jk} \tag{5.21}$$

donde λ, μ y η son escalares. En virtud de la simetría mayor donde $C_{ijkl} = C_{jikl}$ se tiene que $\mu = \eta$, por lo tanto el tensor constitutivo elástico se reduce a:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{5.22}$$

La ecuación anterior se puede escribir en notación compacta de la forma:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \tag{5.23}$$

siendo **1** el tensor unidad de segundo orden y **I** el tensor unidad simétrico de cuarto orden indicados en la Ecuaciones (1.54) y (1.61) respectivamente. En consecuencia el tensor **C** se obtiene a partir de los valores λ y μ, denominados constantes elásticas de Lamé. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, la ecuación constitutiva se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda [\mathrm{tr} \boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Observación. *El número de planos de simetría del material reduce la cantidad de constantes elásticas necesarias para definir al tensor constitutivo elástico. En el material anisótropo los coeficientes del tensor simétrico* ***C*** *son independientes entre sí, lo cual significa que se requieren 21 constantes elásticas para definirlo. En cambio, en el material ortótropo se requieren 9 y en el material isótropo solamente 2 constantes elásticas para obtener las componentes de* ***C***.

5.4.2. Interpretación física de la ecuación constitutiva de un material elástico lineal isótropo

Las propiedades mecánicas más importantes de un material se pueden obtener a partir de un ensayo de tracción o compresión axial de una probeta usualmente prismática y alargada. En el experimento a tensión se aplica progresivamente una fuerza axial P mientras se mide el incremento en la longitud de la probeta ΔL. A partir de los resultados se puede construir una gráfica entre el esfuerzo normal medio calculado como $\sigma_N = P/A$ y la medida de deformación longitudinal ingenieril $\varepsilon_E = \Delta L/L$ mostrada en la **Figura 5.2**, siendo L la longitud y A el área de la sección transversal inicial de la probeta.

La denominada *curva o diagrama esfuerzo - deformación* representará las diferentes etapas del comportamiento mecánico unidimensional de un material. En materiales utilizados en estructuras convencionales como el concreto, el acero y la madera, existe una primera etapa donde el esfuerzo normal y la deformación longitudinal son directamente proporcionales,

mostrando una línea recta en el diagrama esfuerzo - deformación. Si además, al retirarse la carga aplicada la probeta recupera su longitud inicial, tal etapa se denomina comportamiento elástico lineal del material.

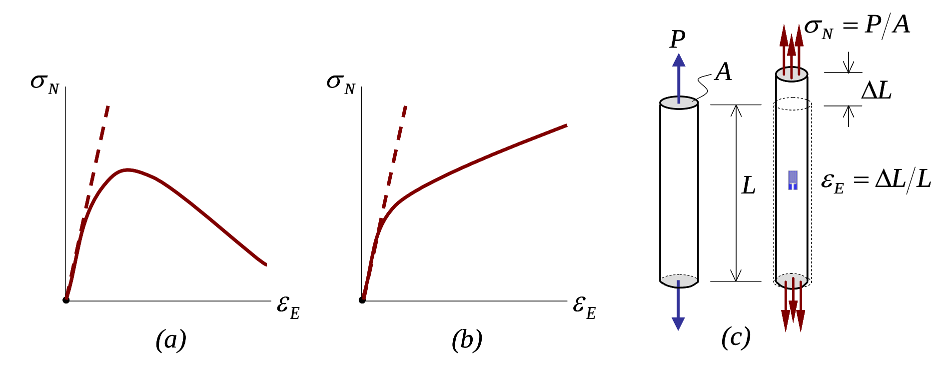


Figura 5.2. Curva esfuerzo - deformación: (a) material con ablandamiento, (b) material con endurecimiento, (c) esquema de un ensayo de tracción uniaxial.

La *ley de Hooke* establece la relación lineal entre el esfuerzo normal y la deformación longitudinal (**Figura 5.3(a))**, de una barra prismática sometida a tracción o compresión simple como $\sigma_N = E\varepsilon_E$, siendo el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young* E la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación en la etapa elástica lineal.

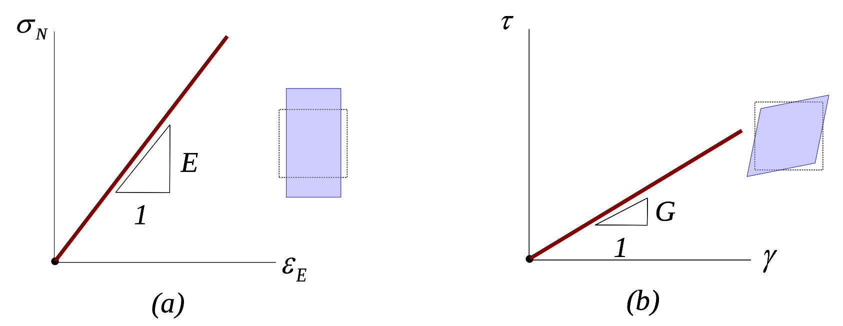


Figura 5.3. Ley de Hooke en el campo unidimensional: (a) relación esfuerzo normal vs. Deformación longitudinal, (b) relación esfuerzo cortante vs. deformación angular.

De forma análoga se puede definir la *ley de Hooke para cortante* como la relación lineal entre el esfuerzo cortante τ y la deformación angular ingenieril γ, (**Figura 5.3(b))**, de una probeta sometida a cortante puro en un plano específico de la forma $\tau = G\gamma$, siendo G el *módulo de elasticidad a cortante*.

El esfuerzo de tracción actuante sobre la probeta produce un alargamiento en la dirección axial acompañado de una contracción

transversal o perpendicular a la dirección del esfuerzo. En materiales elásticos lineales isótropos, la deformación lateral asociada a la contracción transversal es proporcional a la deformación axial asociada al alargamiento longitudinal. El cociente entre la deformación en la dirección lateral y la deformación en la dirección axial se conoce como *relación de Poisson* ν y se define como:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lateral}}{\varepsilon_{axial}} \tag{5.25}$$

Recordando que una deformación longitudinal positiva está relacionada con el alargamiento del sólido, mientras que un valor negativo de deformación longitudinal está asociado al acortamiento del mismo. El signo menos en la expresión anterior indica que el alargamiento en la dirección axial está acompañado de un acortamiento lateral y viceversa.

Sea un paralelepípedo diferencial unitario de lados paralelos a los ejes coordenados $x_1 x_2 x_3$ sometido exclusivamente a un esfuerzo normal σ_{11} en la dirección x_1 mostrado en la **Figura 5.4(a)**.

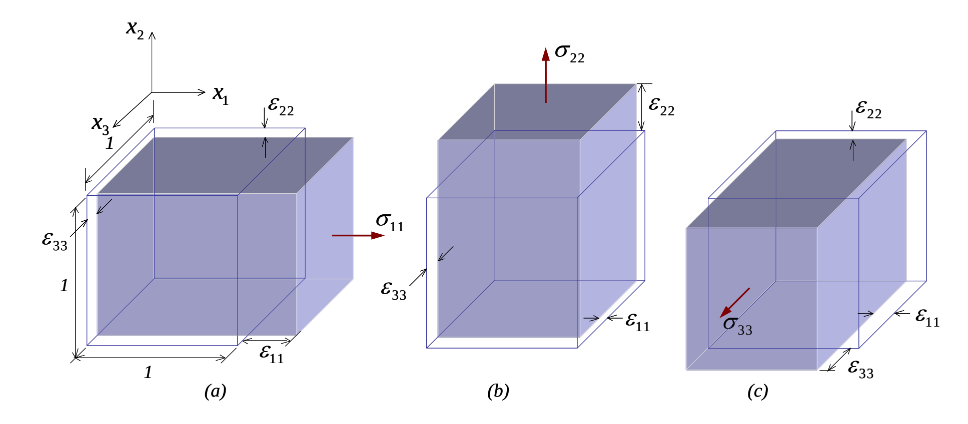


Figura 5.4. Deformaciones longitudinales en un elemento diferencial cuando actúa un esfuerzo normal: (a) en dirección x_1, (b) en dirección x_2, (c) en dirección x_3.

La deformación longitudinal en la dirección x_1 es igual a $\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$, mientras que la deformación lateral dada en las direcciones x_2 y x_3 corresponde a $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\sigma_{11}/E$. De la misma manera, si el elemento diferencial está sometido a un esfuerzo normal σ_{22} solamente como lo indica la **Figura 5.4(b)**, la deformación longitudinal en la misma dirección del esfuerzo será $\varepsilon_{22} = \sigma_{22}/E$ y la deformación lateral en las direcciones x_1 y x_3 es igual a $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\sigma_{22}/E$. Si ahora actúa un esfuerzo normal σ_{33} sobre el elemento diferencial como se ilustra en la **Figura 5.4(c)**, la deformación longitudinal en la misma dirección es igual

a $\varepsilon_{33} = \sigma_{33}/E$ y la deformación lateral en las direcciones x_1 y x_2 corresponde a $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu\,\sigma_{33}/E$.

Considerando que los esfuerzos cortantes solo producen deformaciones angulares, las deformaciones longitudinales obtenidas de la acción de los esfuerzos normales son iguales a:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}\right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33}\right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Despejando las componentes de esfuerzo normal de la expresión anterior se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{33}\right] \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{33}\right] \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + (1-\nu)\varepsilon_{33}\right]
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Por otro lado, la deformación angular ingenieril en el plano x_1x_2 es proporcional al esfuerzo cortante en dicho plano de la forma $\gamma_{12} = \sigma_{12}/G$. De igual manera, se obtienen las siguientes relaciones en los planos x_1x_3 y x_2x_3.

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \quad , \quad \gamma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad , \quad \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G} \tag{5.28}$$

Despejando las componentes de esfuerzo cortante se tiene que:

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12} \quad , \quad \sigma_{13} = G\gamma_{13} \quad , \quad \sigma_{23} = G\gamma_{23} \tag{5.29}$$

Las ecuaciones escalares (5.27) y (5.29) indican la relación constitutiva de un material elástico lineal isótropo.

Dado que el módulo de elasticidad a cortante se puede expresar en términos de E y ν como lo indica la Ecuación (5.37), la relación entre el esfuerzo y la deformación se puede escribir en notación tensorial indicial y compacta así:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{1} + \frac{E}{(1+\nu)}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (5.30)$$

Asimismo, la ecuación constitutiva inversa en notación tensorial indicial y compacta corresponde a:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} \qquad (5.31)$$

5.4.3. Relación entre el módulo de elasticidad a cortante y el módulo de Young

Sea un estado de cortante puro en el plano x_1x_2 de la forma:

$$\sigma_{12} = \tau \quad ; \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \qquad (5.32)$$

Aplicando la Ecuación (2.106), las componentes de esfuerzo con respecto a un sistema coordenado $\bar{x}_1\bar{x}_2$, el cual conforma un ángulo de 45 grados entre los ejes x_1 y $\bar{x}_1$ son:

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{12} = \tau \quad , \quad \bar{\sigma}_{22} = -\sigma_{12} = -\tau \quad , \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \qquad (5.33)$$

De acuerdo con la relación deformación – esfuerzo de la Ecuación (5.26), la deformación longitudinal en la dirección $\bar{x}_1$ es igual a:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E}\left(\bar{\sigma}_{11} - \nu\bar{\sigma}_{22} - \nu\bar{\sigma}_{33}\right) = \frac{\tau}{E}(1+\nu) \qquad (5.34)$$

Sea un estado de deformación angular pura en el plano x_1x_2 asociado al estado plano de esfuerzo cortante puro de la forma:

$$\gamma_{12} = \gamma \quad ; \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \qquad (5.35)$$

Aplicando la Ecuación (3.134), la deformación longitudinal con respecto a un sistema coordenado $\bar{x}_1\bar{x}_2$, el cual conforma un ángulo de 45 grados entre los ejes x_1 y $\bar{x}_1$ son:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \tfrac{1}{2}\gamma_{12} = \tfrac{1}{2}\gamma \qquad (5.36)$$

De acuerdo con la ley de Hooke para cortante $\tau = G\gamma$, igualando la Ecuación (5.34) y la expresión anterior, se concluye que el módulo de elasticidad a cortante es igual a:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{5.37}$$

5.4.4. Relación entre el módulo de Young, la relación de Poisson y las constantes de Lamé

La ecuación constitutiva de un material lineal elástico isótropo está definida por las constantes elásticas y las componentes de esfuerzo y de deformación. La expresión tensorial indicada en la Ecuación (5.24) está dada en términos de las constantes de Lamé λ, μ, en cambio las ecuaciones escalares (5.27) y (5.29) están descritas en función del módulo de Young y de la relación de Poisson. Tales constantes se pueden relacionar a partir de las ecuaciones indicadas anteriormente.

De acuerdo con la expresión tensorial (5.24), la componente de esfuerzo cortante σ_{12} es igual a $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12}$. Igualando este resultado con la Ecuación (5.29) se concluye que:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{5.38}$$

Asimismo, la componente de esfuerzo normal en la dirección x_1 corresponde a:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \tag{5.39}$$

Igualando el resultado anterior con la Ecuación (5.27) se obtiene que:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{5.40}$$

5.4.5. Ecuación constitutiva en notación de Voigt

La ecuación constitutiva definida de forma tensorial en el Apartado 5.4.1 y obtenida como el conjunto de 6 ecuaciones escalares en el Apartado 5.4.2, se puede reescribir en notación de Voigt como $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$. Si el tensor constitutivo elástico está dado en términos de las constantes de Lamé, la ecuación constitutiva será de la forma:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0\\ & & & \mu & 0 & 0\\ & & & & \mu & 0\\ sim & & & & & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

(5.41)

Asimismo, la ecuación constitutiva se puede expresar en función del módulo de Young y la relación de Poisson obteniendo:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0\\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0\\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0\\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0\\ sim & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

(5.42)

Al despejar el tensor de la deformación de la Ecuación (5.24) se tiene la relación constitutiva inversa, presentada en notación tensorial como:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}=C^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}\\ \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{C}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}\end{gathered}\tag{5.43}$$

Las ecuaciones escalares (5.26) y (5.28) definen a las 6 componentes de deformación en términos de las componentes de esfuerzo.

En notación de Voigt, despejando la matriz columna de deformación de la Ecuación (5.18) se tiene que:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\mathbf{C}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\}\tag{5.44}$$

A partir de las ecuaciones escalares indicadas anteriormente, la ecuación constitutiva inversa se puede escribir en notación de Voigt y en términos de E y ν de la forma:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ sim & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}
$$

(5.45)

5.5. Estado plano de esfuerzos

Recordando que se considera un estado plano de esfuerzos en un sólido cuando las componentes de esfuerzo que no están contenidas en un plano específico (o en planos paralelos) son nulas. Por lo tanto, si el sólido describe una condición plana de esfuerzos en el plano x_1x_2 como lo muestra la **Figura 2.18**, las componentes del tensor esfuerzo en un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ son:

$$
[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.46}
$$

Sustituyendo la componente de esfuerzo $\sigma_{33} = 0$ en la tercera de las ecuaciones escalares (5.27) y despejando ε_{33} se tiene que:

$$
\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \tag{5.47}
$$

Se observa que a pesar que las componentes de esfuerzo fuera del plano x_1x_2 son nulas la componente de deformación longitudinal ε_{33} en la dirección x_3 es diferente de cero y depende de las otras dos componentes de deformación longitudinal.

Las componentes de esfuerzo normal se obtienen reemplazando el resultado anterior en las dos primeras ecuaciones escalares (5.27), así:

$$
\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right] \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right] \tag{5.48}
$$

La componente de esfuerzo cortante σ_{12} está dada por la primera ecuación escalar (5.29), de la forma:

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12} \tag{5.49}$$

Sustituyendo las componentes de esfuerzo en las ecuaciones escalares (5.26) y (5.28) se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad , \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
&\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
&\gamma_{13} = 0 \quad , \quad \gamma_{23} = 0 \quad , \quad \gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

En notación matricial las componentes del tensor de deformación se presentan de la forma:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) & (1+\nu)\sigma_{12} & 0 \\ (1+\nu)\sigma_{12} & (-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

Dado que la componente de deformación longitudinal ε_{33} indicada en la Ecuación (5.47) depende de las otras componentes de deformación longitudinal, la matriz columna que representa en notación de Voigt a la deformación contiene solo las componentes en el plano x_1x_2, es decir:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}]^T \tag{5.52}$$

De igual manera, la matriz columna de las componentes de esfuerzo es de la forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \tag{5.53}$$

Por lo tanto la ecuación constitutiva de un material elástico lineal en condición plana de esfuerzos escrita en notación de Voigt dada por las ecuaciones (5.48) y (5.49), es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Si es necesario evaluar la componente de deformación longitudinal ε_{33}, ausente en la expresión anterior, se calcula de acuerdo con la Ecuación (5.47).

5.6. Estado plano de deformaciones

Sea un estado plano de deformaciones aquel en el cual las componentes de deformación que no están contenidas en un plano específico (o en planos paralelos) son nulas. Por lo tanto, si el sólido describe una condición plana de deformaciones en el plano x_1x_2 las componentes del tensor deformación en un sistema coordenado $x_1x_2x_3$ son:

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.55}$$

Sustituyendo la componente de deformación longitudinal $\varepsilon_{33}=0$ en la tercera de las ecuaciones escalares (5.26) y despejando σ_{33} se tiene que:

$$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \tag{5.56}$$

Se observa que a pesar que las componentes de deformación fuera del plano x_1x_2 son nulas, la componente de esfuerzo normal en la dirección x_3 es diferente de cero y depende de las otras dos componentes de esfuerzo normal.

Por otro lado, reemplazando las componentes de deformación en las ecuaciones escalares (5.27) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right]\\ \sigma_{22}&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11}+(1-\nu)\varepsilon_{22}\right]\\ \sigma_{33}&=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right]\end{aligned} \tag{5.57}$$

La componente de esfuerzo cortante σ_{12} está dada por la primera ecuación escalar (5.29), de la forma:

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12} \tag{5.58}$$

Por lo tanto las componentes del tensor de esfuerzos en un estado plano de deformaciones corresponden a:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} & (1-2\nu)\varepsilon_{12} & 0 \\ (1-2\nu)\varepsilon_{12} & \nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{bmatrix}$$

(5.59)

Dado que la componente de esfuerzo normal σ_{33} indicada en la Ecuación (5.56) depende de las otras componentes de esfuerzo normal, la matriz columna que representa el esfuerzo contiene solo las componentes en el plano $x_1 x_2$ como lo muestra la Ecuación (5.53). Asimismo, la matriz columna de las componentes de deformación en notación de Voigt está indicada en la Ecuación (5.52).

De acuerdo con las expresiones (5.57) y (5.58), la relación constitutiva de un material elástico lineal en condición plana de deformaciones escrita en notación de Voigt es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

(5.60)

Después de evaluados los coeficientes de la matriz columna de esfuerzos, la componente σ_{33} se calcula como lo muestra la Ecuación (5.56).

Capítulo 6
Planteamiento del problema elástico lineal

Hasta el momento se han presentado los elementos de la mecánica del medio continuo indispensables para resolver un problema mecánico, en particular si el material es elástico, lineal e isótropo. En este capítulo se busca plantear el problema general de elasticidad lineal relacionando las condiciones de equilibrio, la ecuación constitutiva del material y la descripción del esfuerzo y la deformación (Timoshenko & Goodier 1970; Ortiz 1998; Mase & Mase 1999; Oliver & Agelet 2002).

6.1. Planteamiento general del problema elástico lineal

El problema elástico lineal consiste en obtener, para todo instante de tiempo, el desplazamiento, la deformación infinitesimal y el esfuerzo de cada una de las partículas que conforma un sólido de material elástico lineal isótropo, el cual está sometido a diferentes fuerzas externas.

Sea un sólido de volumen V sujeto a la fuerza de cuerpo $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ distribuida por unidad de volumen y a la fuerza de superficie $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ distribuida por unidad de área y aplicada en su contorno $\partial V_\sigma \subset \partial V$ como lo muestra la **Figura 6.1**. El problema consiste en evaluar el campo vectorial del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ y los campos tensoriales de la deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$, siendo conocidas las fuerzas externas y las condiciones de borde en el espacio y en el tiempo.

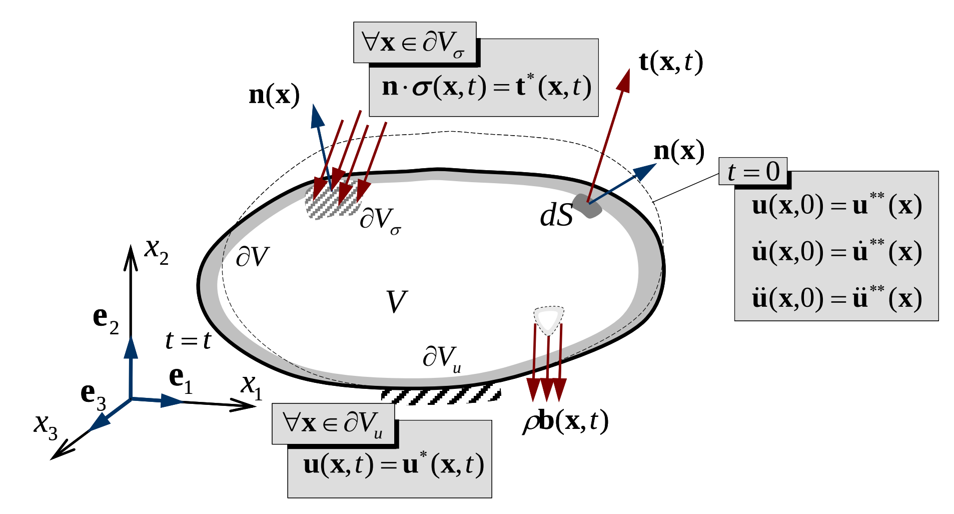


Figura 6.1. Fuerzas aplicadas y condiciones de borde en un sólido

El problema satisface el principio de la conservación de la cantidad de movimiento expresado como condiciones de equilibrio, la relación entre la deformación y el desplazamiento, y la relación entre el esfuerzo y la deformación. Las expresiones que describen las tres condiciones anteriores se denominan *ecuaciones de gobierno* del problema.

Además, se incluyen las condiciones de borde al planteamiento del problema, las cuales están definidas en el espacio y el tiempo. Las condiciones de borde en el espacio son valores conocidos del desplazamiento y de las fuerzas de superficie en regiones específicas del contorno del sólido. En cambio, las condiciones de borde en el tiempo son valores de desplazamiento y sus derivadas en el instante de tiempo inicial.

A continuación se plantea el problema mecánico para un material elástico, lineal e isótropo, indicando cada una de las ecuaciones de gobierno.

6.1.1. Ley de conservación de la cantidad de movimiento

La forma local de la ley de conservación de la cantidad de movimiento en descripción espacial, también denominada ecuación de Cauchy, representa la condición de equilibrio dinámico de cada partícula del cuerpo incluyendo a las fuerzas inerciales. Dado que la aceleración es igual a $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$, se puede reescribir la Ecuación (4.32) de la forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x} \in V_t$$
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \tag{6.1}$$

Tal expresión tensorial contiene a 3 ecuaciones escalares para $j = 1,2,3$. Es importante recordar que la ley de conservación de la cantidad de movimiento tiene validez independientemente de la cinemática o del modelo constitutivo que describe al cuerpo.

Si la aceleración del sólido es nula, la expresión anterior se transforma en la condición de equilibrio estático definida como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V_t$$
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \tag{6.2}$$

6.1.2. Relación deformación infinitesimal–desplazamiento

La teoría de deformaciones infinitesimales considera que tanto la deformación como el desplazamiento son pequeños comparados con las dimensiones del sólido, esto conlleva a suponer que las componentes del gradiente material de desplazamiento son pequeñas con respecto a 1 y son aproximadamente iguales a las componentes del gradiente espacial de desplazamiento, como lo indican las ecuaciones (3.58) y (3.59). La cinemática del cuerpo bajo tales las condiciones está definida por la ecuación que relaciona al campo tensorial de la deformación infinitesimal con el campo vectorial del desplazamiento. Como se indicó en la Ecuación (3.68), el tensor de deformación infinitesimal en una partícula es igual a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}\right) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x} \in V$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.3}$$

A diferencia de otras medidas de deformación, se observa que la deformación infinitesimal es una función lineal del gradiente del desplazamiento.

Tal expresión tensorial denominada *relación deformación infinitesimal – desplazamiento*, contiene 9 ecuaciones escalares, de las cuales 6 son distintas entre sí debido a la simetría del tensor deformación.

6.1.3. Ecuación constitutiva del material elástico lineal isótropo

Los campos tensoriales de esfuerzo y de deformación están relacionados mediante la ecuación constitutiva, la cual describe la respuesta mecánica propia del material que compone al sólido. En particular, se considera un material elástico, lineal e isótropo que responde a la ecuación constitutiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \quad \textit{donde} \quad \mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ &\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \textit{donde} \quad C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Sustituyendo el tensor constitutivo elástico **C** en la ecuación constitutiva se obtiene la siguiente forma alternativa de expresar dicha ecuación, como se indicó en la Ecuación (5.24).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda[\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{6.5}$$

La expresión anterior muestra la relación lineal entre las componentes de esfuerzo y de deformación, mediante 9 ecuaciones escalares de las cuales 6 son diferentes entre sí debido a la simetría del tensor de esfuerzos.

En conclusión se plantea un total de 15 ecuaciones escalares distribuidas así: 3 ecuaciones diferenciales parciales dadas por las condiciones de equilibrio en la Expresión (6.1), 6 ecuaciones diferenciales parciales dadas por la relación deformación infinitesimal – desplazamiento en la Expresión (6.3) y 6 ecuaciones escalares dadas por la ecuación constitutiva de un material elástico lineal isótropo en la Expresión (6.5).

Las 15 incógnitas del problema son: las 3 componentes del campo vectorial del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, las 6 componentes del tensor deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y las 6 componentes del tensor esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$.

6.1.4. Condiciones de borde en el espacio y en el tiempo

Las condiciones de borde en el espacio indicadas a continuación son valores conocidos del desplazamiento o de las fuerzas de superficie en una parte del contorno del sólido.

Como lo muestra la **Figura 6.1**, ∂V_u es la parte del contorno del sólido ∂V donde el valor del desplazamiento tiene un valor conocido $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$ para todo instante de tiempo, es decir:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_u \quad \forall t \tag{6.6}$$

En la parte ∂V_σ del contorno del sólido ∂V, el valor de la fuerza de superficie corresponde a $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ para todo instante de tiempo. El vector de fuerzas de superficie es igual al vector tracción en el contorno del sólido, estableciendo una condición de borde de la forma:

$$\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x},t) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_\sigma \quad \forall t \tag{6.7}$$

Las condiciones de borde en el tiempo corresponden a valores definidos del desplazamiento, la velocidad o la aceleración en el instante de tiempo inicial o de referencia para todo punto material del sólido. Estas condiciones de borde, también denominadas *condiciones iniciales*, se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x},0) &= \mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) &= \dot{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) &= \ddot{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \end{aligned} \tag{6.8}$$

Algunos problemas de mecánica de sólidos muestran restricciones combinadas o mixtas dadas a partir de las condiciones de borde presentadas anteriormente. Por ejemplo es posible que una misma región tenga un valor conocido de desplazamiento y de fuerza de superficie.

6.2. Ecuaciones de Navier

A partir de las ecuaciones de gobierno y de las condiciones de borde presentadas anteriormente, el problema elástico lineal se puede plantear en función del campo de los desplazamientos.

Sustituyendo la relación deformación infinitesimal – desplazamiento (6.3) en la ecuación constitutiva (6.5) se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.9}$$

El resultado de reemplazar la expresión anterior en la ecuación conservación de la cantidad de movimiento (6.1) es:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\right) + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j$$

Dado que el primer término a la izquierda de la ecuación es igual a:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) = \lambda \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j}$$

se obtiene a continuación un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en términos del campo del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ denominado *ecuaciones de Navier*.

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \qquad (6.10)$$

En particular, si se considera un problema estático o de velocidad constante donde la aceleración es igual cero, las ecuaciones de Navier se pueden escribir de la forma:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \rho b_j = 0 \qquad (6.11)$$

Asimismo, las condiciones de borde también se expresan en términos del desplazamiento al sustituir la Ecuación (6.9) en la Ecuación (6.7), así:

$$\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_j + \mu n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = t_j^* \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_\sigma \qquad (6.12)$$

La condición de borde que establece el valor del desplazamiento en una parte específica del contorno se expresa de la misma forma como lo indica la Ecuación (6.6).

6.3. Ecuaciones de Beltrami – Michell

Otra forma de resolver el problema elástico lineal estático consiste en plantear un grupo de ecuaciones diferenciales parciales en función del estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$. El procedimiento consiste en sustituir la ecuación constitutiva inversa (5.31) en la ecuación de compatibilidad de

deformación infinitesimal dada en la Expresión (3.151) y remplazar el resultado en la ecuación del equilibrio (6.2). Las expresiones obtenidas se denominan *ecuaciones de Beltrami – Michell*, las cuales se escriben de la forma:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + \rho \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho \frac{\partial b_k}{\partial x_k} = 0 \qquad (6.13)$$

6.4. Planteamiento del problema termo elástico lineal

Además de la aplicación de fuerzas externas existen otros tipos de acciones que producen deformación sobre el sólido, una de ellas es el cambio de temperatura. El problema termo elástico lineal considera los efectos generados por las fuerzas externas y por los cambios de temperatura en un material elástico lineal de forma desacoplada. Lo anterior significa que los cambios de temperatura provocados por la deformación mecánica son despreciables.

Los efectos de expansión (o contracción) sin distorsión de un sólido isótropo producto del cambio de temperatura se reflejan en su deformación longitudinal. Por lo tanto se puede establecer una relación entre el campo tensorial de la deformación térmica $\boldsymbol{\varepsilon}^{tem}(\mathbf{x},t)$ y el campo escalar del incremento de la temperatura. Este último está definido como la diferencia entre la temperatura de la configuración actual $\theta(\mathbf{x},t)$ y la temperatura de la configuración de referencia $\theta_0(\mathbf{x})$. Para un material elástico lineal isótropo tal relación es de la forma:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon}^{tem}(\mathbf{x},t) = \alpha\left[\theta(\mathbf{x},t) - \theta_0(\mathbf{x})\right]\mathbf{1} \\ \varepsilon_{ij}^{tem} = \alpha\left[\theta - \theta_0\right]\delta_{ij} \end{gathered} \qquad (6.14)$$

La expresión anterior establece una relación lineal entre la deformación térmica y el cambio de temperatura, cuyo factor de proporcionalidad corresponde al denominado *coeficiente de expansión térmica del material* α.

Se puede observar que las componentes tangenciales del tensor de deformación térmica son nulas indicando que el cambio de temperatura no genera distorsión en el sólido.

Siendo que el problema conserva su carácter lineal, el tensor de deformación de cada punto material $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ se puede expresar como la suma entre la deformación mecánica generada por las fuerzas externas aplicadas $\boldsymbol{\varepsilon}^{mec}(\mathbf{x},t)$ y la deformación térmica producida por los cambios de temperatura $\boldsymbol{\varepsilon}^{tem}(\mathbf{x},t)$, es decir:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{mec}(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\varepsilon}^{tem}(\mathbf{x},t) \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{mec} + \varepsilon_{ij}^{tem}\end{gathered} \tag{6.15}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, la Ecuación (5.31) la cual expresa la deformación mecánica en función del esfuerzo y la Ecuación (6.14) que indica la deformación térmica en términos de la temperatura, se obtiene:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} + \alpha\left[\theta - \theta_0\right]\delta_{ij} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\left[\theta - \theta_0\right]\mathbf{1}\end{gathered} \tag{6.16}$$

A partir de las expresiones anteriores se establece la *ecuación constitutiva del material termo elástico lineal isótropo* despejando las componentes de esfuerzo de tal forma que:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + (1-2\nu)\varepsilon_{ij} - \alpha(1+\nu)(\theta - \theta_0)\delta_{ij}\right] \\ \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{1} + (1-2\nu)\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(1+\nu)(\theta - \theta_0)\mathbf{1}\right]\end{gathered} \tag{6.17}$$

Por otro lado, se considera que la transferencia de calor en un sólido elástico está controlada por la *ley de Fourier* definida como:

$$\begin{gathered}-\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = q_i \\ -\kappa\nabla\theta(\mathbf{x},t) = \mathbf{q}(\mathbf{x},t)\end{gathered} \tag{6.18}$$

donde κ es el coeficiente de conductividad térmica y $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ es un campo vectorial que representa el flujo de calor por unidad de área y por unidad de tiempo, el cual se puede expresar como:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho c\frac{\partial\theta}{\partial t} \\ -\nabla\cdot\mathbf{q} = \rho c\dot{\theta}\end{gathered} \tag{6.19}$$

siendo c el calor específico. De acuerdo con las ecuaciones anteriores, el campo de la temperatura está controlado por la siguiente ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)=\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}\quad\rightarrow\quad\kappa\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right)=\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\left(\kappa\nabla\theta\right)=\rho c\dot{\theta}\quad\rightarrow\quad\kappa\nabla^2\cdot\theta(\mathbf{x},t)=\rho c\dot{\theta}(\mathbf{x},t)\tag{6.20}$$

La ecuación constitutiva (6.17) y la última expresión se adicionan a las ecuaciones de gobierno para conformar el planteamiento de problema termo elástico lineal.

6.5. Estado plano de esfuerzos

A continuación se considera un problema elástico lineal que se puede simplificar a un estado plano de esfuerzos para el cual las componentes de esfuerzo que no están contenidas en el plano x_1x_2 son nulas, es decir $\sigma_{31}=\sigma_{32}=\sigma_{33}=0$.

Si la aceleración es cero, la ecuación tensorial de equilibrio se transforma a dos ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\rho b_1=0\\&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\rho b_2=0\end{aligned}\tag{6.21}$$

La expresión escalar que se omitió de la ecuación de equilibrio anterior, solo verifica que la componente b_3 de las fuerzas de cuerpo es nula en problemas de elasticidad plana.

La relación entre las componentes de esfuerzo y de deformación descrita en el Apartado 5.5, permite concluir que las deformaciones tangenciales ingenieriles que no están contenidas en el plano son nulas, es decir $\gamma_{13}=\gamma_{23}=0$ y que la deformación longitudinal en la dirección normal al plano es función de las otras componentes longitudinales de la forma $\varepsilon_{33}=-\nu\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)/(1-\nu)$. La ecuación constitutiva en condición plana de esfuerzos se resume en 3 expresiones escalares de la forma:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\left[\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right]$$
$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right] \qquad (6.22)$$
$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12}$$

La relación entre la deformación infinitesimal y el desplazamiento corresponde a 3 expresiones escalares independientes de la forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad , \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad (6.23)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se pueden obtener las componentes independientes del desplazamiento u_1, u_2 mediante la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \rho b_1 = 0$$
$$\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\left[\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] + \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right] + \rho b_2 = 0 \qquad (6.24)$$

Tales expresiones se denominan ecuaciones de Navier en condición plana de esfuerzos.

6.6. Estado plano de deformaciones

A continuación se considera un problema elástico lineal que se puede simplificar a un estado plano de deformaciones para el cual las componentes de deformación que no están contenidas en el plano $x_1 x_2$ son nulas, es decir $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \varepsilon_{33} = 0$.

Como se indicó en el Apartado 5.6, las componentes de esfuerzo contenidas en el plano $x_1 x_2$ para un estado plano de deformaciones son iguales a:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right] \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22}\right] \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12}
\end{aligned}
\qquad (6.25)
$$

En cambio, las componentes de esfuerzo cortante σ_{13}, σ_{23} son iguales a cero y la componente de esfuerzo normal en la dirección x_3 depende de las otras dos componentes de esfuerzo normal de la forma $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.

Para un problema estático en condición plana de deformaciones las ecuaciones escalares de equilibrio y la relación deformación infinitesimal – desplazamiento corresponde a las ecuaciones (6.21) y (6.23), respectivamente. La ecuación escalar de equilibrio omitida en la expresión (6.21) establece que la componente de esfuerzo σ_{33} es constante con respecto a la dirección x_3.

A partir de las ecuaciones anteriores, se pueden obtener las componentes independientes del desplazamiento u_1, u_2 mediante la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \rho b_1 = 0 \\
&\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right] + \rho b_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (6.26)
$$

Tales expresiones se denominan ecuaciones de Navier en condición plana de deformaciones.

6.7. Función de esfuerzos de Airy

Recordando la relación entre las componentes de deformación y de esfuerzo para un material elástico lineal isótropo en condición plana de esfuerzos:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \tag{6.27}$$

y remplazando esta última en la ecuación de compatibilidad de deformaciones de la forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{6.28}$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial en términos de las componentes de esfuerzo:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{6.29}$$

Si las fuerzas de cuerpo son nulas, se puede definir un campo escalar denominado *función de esfuerzos de Airy* $\phi(x_1, x_2)$, cuyas segundas derivadas con respecto a x_1, x_2 corresponden a las componentes de esfuerzo en el plano así:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{6.30}$$

Sustituyendo a la expresión anterior en la Ecuación (6.29) se obtiene una ecuación diferencial de campo biarmónica de la forma:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{6.31}$$

Las condiciones de borde asociadas al esfuerzo se deben cumplir en cada problema particular. Para cuerpos de geometría rectangular, la función de esfuerzos corresponde a un polinomio en términos de x_1, x_2.

6.7.1. Condiciones de borde en una placa rectangular

Las fuerzas por unidad de superficie aplicadas al contorno de la placa están contenidas en el plano, es decir que en general son de la forma $\mathbf{t}^* = t_1^* \mathbf{e}_1 + t_2^* \mathbf{e}_2$.

Las condiciones de borde correspondientes al equilibrio entre la fuerza de superficie y el vector tracción $\mathbf{t}^* = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ son las siguientes. En la cara superior de la placa, para $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \quad x_2 = h \quad 0 \le x_1 \le L$ (**Figura 6.2**), se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} & t_1^* \mathbf{e}_1 + t_2^* \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \mathbf{x} | x_2 = h \quad 0 \le x_1 \le L \\ & t_1^* = \sigma_{21} \quad t_2^* = \sigma_{22} \end{aligned} \tag{6.32}$$

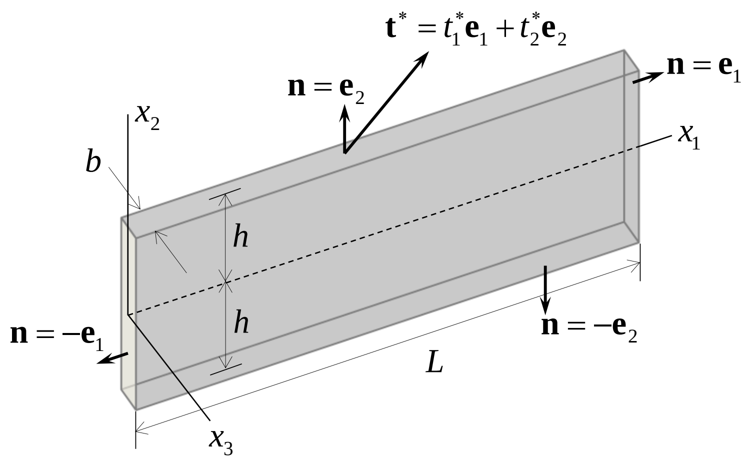


Figura 6.2. Placa rectangular en condición plana de esfuerzos

En la cara inferior de la placa, donde $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2 \quad x_2 = -h \quad 0 \le x_1 \le L$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & t_1^* \mathbf{e}_1 + t_2^* \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \mathbf{x} | x_2 = -h \quad 0 \le x_1 \le L \\ & t_1^* = -\sigma_{21} \quad t_2^* = -\sigma_{22} \end{aligned} \tag{6.33}$$

Sobre la cara izquierda de la placa, siendo $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1 \quad x_1 = 0 \quad -h \le x_2 \le h$, se cumple que:

$$\begin{aligned} & t_1^* \mathbf{e}_1 + t_2^* \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \mathbf{x} | x_1 = 0 \quad -h \le x_2 \le h \\ & t_1^* = -\sigma_{11} \quad t_2^* = -\sigma_{12} \end{aligned} \tag{6.34}$$

Sobre la cara derecha de la placa, siendo $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \quad x_1 = L \quad -h \le x_2 \le h$, se cumple que:

$$\begin{aligned} &t_1^* \mathbf{e}_1 + t_2^* \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \mathbf{x} | x_1 = L \quad -h \leq x_2 \leq h \\ &t_1^* = \sigma_{11} \quad t_2^* = \sigma_{12} \end{aligned} \tag{6.35}$$

6.7.2. Placa rectangular cuya función de Airy es polinómica de tercer orden

A continuación se presenta la solución general de la ecuación diferencial biarmónica (6.31), para el problema de una placa rectangular de longitud *L*, altura *2h* y espesor *b*, en condición plana de esfuerzos (**Figura 6.2**), mediante la función de Airy polinómica de tercer orden de la forma:

$$\begin{aligned} \phi = &\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2^2 + \alpha_4 x_2^3 + \alpha_5 x_1^2 + \\ &+ \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_2^2 + \alpha_8 x_1 + \alpha_9 x_2 + \alpha_{10} \end{aligned} \tag{6.36}$$

Después de derivar la función de Airy con respecto a las direcciones x_1, x_2 se obtienen las siguientes componentes de esfuerzo, despreciando las fuerzas de cuerpo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &= \sigma_{22} = 6\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2 + 2\alpha_5 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} &= \sigma_{11} = \alpha_3 x_1 + 6\alpha_4 x_2 + 2\alpha_7 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\sigma_{12} = 2\alpha_2 x_1 + 2\alpha_3 x_2 + \alpha_6 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Siendo la función de Airy un polinomio de tercer orden, las componentes de esfuerzo son funciones de variación lineal. Por ejemplo, este tipo de funciones pueden representar a una viga sometida a flexión pura donde el esfuerzo normal σ_{11} varia linealmente con respecto a x_2, o cuando σ_{22} varia linealmente con respecto a x_1.

Las derivadas de cuarto orden de la función con respecto a x_1, x_2 son iguales a:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} = 0 \tag{6.38}$$

La Ecuación diferencial (6.31) se cumple, remplazando las derivadas de cuarto orden de la función de Airy presentadas en la anterior expresión.

En las ecuaciones (6.37) y (6.38) se observa que los coeficientes de la función de Airy de primer orden $\alpha_8 x_1 + \alpha_9 x_2 + \alpha_{10}$, no afectan las componentes de esfuerzo y la ecuación diferencial biarmónica. En consecuencia, cualquier valor de $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ conlleva a la misma solución. Se considera entonces que:

$$\alpha_8 = 0, \quad \alpha_9 = 0, \quad \alpha_{10} = 0 \tag{6.39}$$

6.7.3. Placa rectangular cuya función de Airy es polinómica de cuarto orden

A continuación se presenta la solución general de la ecuación diferencial biarmónica (6.31), para el problema de una placa rectangular de longitud *L*, altura *2h* y espesor *b*, en condición plana de esfuerzos (**Figura 6.2**), mediante la función de Airy polinómica de cuarto orden de la forma:

$$\begin{aligned}\phi = {} & \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_1^3 x_2 + \alpha_3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_4 x_1 x_2^3 + \alpha_5 x_2^4 + \\ & + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_2^3 + \alpha_{10} x_1^2 + \\ & + \alpha_{11} x_1 x_2 + \alpha_{12} x_2^2 + \alpha_{13} x_1 + \alpha_{14} x_2 + \alpha_{15}\end{aligned} \tag{6.40}$$

Después de derivar la función de Airy con respecto a las direcciones x_1, x_2 se obtienen las siguientes componentes de esfuerzo, despreciando el peso propio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &= \sigma_{22} = 12\alpha_1 x_1^2 + 6\alpha_2 x_1 x_2 + 2\alpha_3 x_2^2 + \\ &\quad + 6\alpha_6 x_1 + 2\alpha_7 x_2 + 2\alpha_{10} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} &= \sigma_{11} = 2\alpha_3 x_1^2 + 6\alpha_4 x_1 x_2 + 12\alpha_5 x_2^2 + \\ &\quad + \alpha_8 x_1 + 6\alpha_9 x_2 + 2\alpha_{12} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\sigma_{12} = 3\alpha_2 x_1^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2 + 3\alpha_4 x_2^2 + \\ &\quad + 2\alpha_7 x_1 + 2\alpha_8 x_2 + \alpha_{11}\end{aligned} \tag{6.41}$$

Se observa que las componentes de esfuerzo son funciones cuadráticas, las cuales podrían representar a una viga sometida a un momento flector de variación lineal y a su respectivo cortante.

Las derivadas de cuarto orden de la función con respecto a x_1, x_2 son:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} = 24\alpha_1 \quad , \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 24\alpha_5 \quad , \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} = 4\alpha_3 \tag{6.42}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación diferencial se establece la siguiente relación entre los coeficientes desconocidos de ϕ:

$$\alpha_3 = -3(\alpha_1 + \alpha_5) \tag{6.43}$$

En la Ecuación (6.41) se observa que los coeficientes de la función de Airy de primer orden $\alpha_{13}x_1 + \alpha_{14}x_2 + \alpha_{15}$, no afectan las expresiones de las componentes de esfuerzo y de la ecuación diferencial biarmónica. En consecuencia, cualquier valor de $\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}$ conlleva a la misma solución. Se considera entonces que:

$$\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{15} = 0 \tag{6.44}$$

6.7.4. Viga en voladizo sometida a flexión y cortante

Una viga de sección rectangular delgada de longitud *L*, altura 2*h* y espesor *b*, está sometida a una carga puntual *P* en el extremo libre que produce flexión y cortante en su plano como se ilustra en la **Figura 6.3**.

Para este problema se considera que la función de esfuerzos de Airy es el polinomio de cuarto orden mostrado en la Ecuación (6.40), y en consecuencia las componentes de esfuerzo son las presentadas en la Ecuación (6.41).

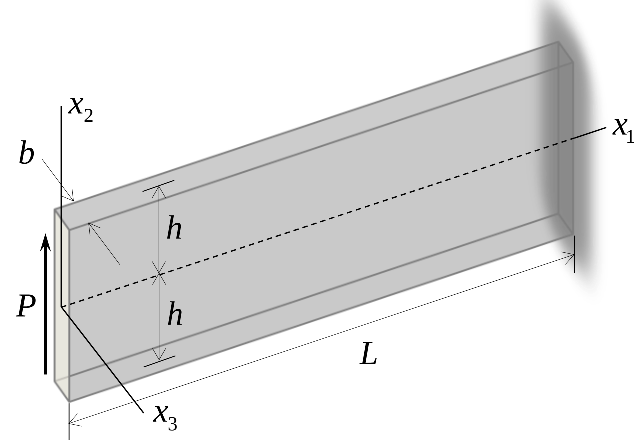


Figura 6.3. Viga en voladizo sometida a flexión y cortante

Las diferentes condiciones de borde de este problema se indican a continuación.

Sobre la cara izquierda en el extremo libre donde $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$, la fuerza de superficie solo tiene componente en dirección x_2 y es equivalente a la acción de una fuerza puntual *P*, de tal forma que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}^* = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad t_2^*\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad \forall\mathbf{x}|x_1 = 0 \quad -h \le x_2 \le h \\ &\rightarrow \quad t_1^* = -\sigma_{11} = 0, \quad t_2^* = -\sigma_{12} \\ &P = \int_{-h}^{h} t_2^* b\, dx_2 = -\int_{-h}^{h} \sigma_{12} b\, dx_2 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Por lo tanto, cuando $\sigma_{11} = 0 \quad \forall\mathbf{x}|x_1 = 0 \quad -h \le x_2 \le h$, se debe cumplir que $12\alpha_5 x_2^2 + 6\alpha_9 x_2 + 2\alpha_{12} = 0$, sustituyendo en la Ecuación (6.41). Si en particular x_2=0, se obtiene que:

$$\alpha_{12} = 0 \quad , \quad \alpha_9 = -2\alpha_5 x_2 \tag{6.46}$$

Cuando $P = -\int_{-h}^{h} \sigma_{12} b\, dx_2 \quad \forall\mathbf{x}|x_1 = 0 \quad -h \le x_2 \le h$ se debe cumplir que:

$$\alpha_{11} = \frac{P}{2bh} - \alpha_4 h^2 \tag{6.47}$$

Otras condiciones de borde se presentan en las caras superior e inferior, en las cuales no hay fuerzas de superficie aplicadas. Siendo $\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_2$ en tales caras, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}^* = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad \mathbf{0} = \pm\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad \forall\mathbf{x}|\, x_2 = \pm h \quad 0 \le x_1 \le L \\ &\rightarrow t_1^* = \pm\sigma_{21} = 0, \quad t_2^* = \pm\sigma_{22} = 0 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Cuando $\sigma_{22} = 0 \quad \forall\mathbf{x}|\, x_2 = \pm h \quad 0 \le x_1 \le L$ y sustituyendo en la Ecuación (6.41), se tiene que:

$$12\alpha_1 x_1^2 \pm 6\alpha_2 x_1 h + 2\alpha_3 h^2 + 6\alpha_6 x_1 \pm 2\alpha_7 h + 2\alpha_{10} = 0 \tag{6.49}$$

Esta función debe cumplirse para $x_1 = 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} &\alpha_3 h^2 + \alpha_7 h + \alpha_{10} = 0 \rightarrow \alpha_{10} = -\alpha_3 h^2 - \alpha_7 h \\ &\alpha_3 h^2 - \alpha_7 h + \alpha_{10} = 0 \rightarrow \alpha_{10} = -\alpha_3 h^2 + \alpha_7 h \\ &\alpha_7 = 0, \quad \alpha_{10} = -\alpha_3 h^2 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la Ecuación (6.49) se obtiene que:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 h + \alpha_6 = 0 \rightarrow \alpha_6 = -\alpha_2 h \\ &-\alpha_2 h + \alpha_6 = 0 \rightarrow \alpha_6 = \alpha_2 h \\ &\alpha_2 = 0, \quad \alpha_6 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Cuando $\sigma_{12} = 0 \quad \forall\mathbf{x}|\, x_2 = \pm h \quad 0 \le x_1 \le L$ se tiene que:

$$3\alpha_2 x_1^2 \pm 4\alpha_3 x_1 h + 3\alpha_4 h^2 + 2\alpha_7 x_1 \pm 2\alpha_8 h + \alpha_{11} = 0 \tag{6.52}$$

Esta función debe cumplirse para $x_1 = 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} &3\alpha_4 h^2 + 2\alpha_8 h + \alpha_{11} = 0 \rightarrow \alpha_{11} = -3\alpha_4 h^2 - 2\alpha_8 h \\ &3\alpha_4 h^2 - 2\alpha_8 h + \alpha_{11} = 0 \rightarrow \alpha_{11} = -3\alpha_4 h^2 + 2\alpha_8 h \\ &\alpha_8 = 0, \quad \alpha_{11} = -3\alpha_4 h^2 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Después de sustituir la Ecuación (6.47) en la última expresión de (6.53), se obtiene:

$$\alpha_{11} = \frac{3P}{4bh} \quad , \quad \alpha_4 = -\frac{P}{4bh^3} \tag{6.54}$$

Sobre la cara derecha siendo $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, la fuerza reactiva de superficie es equivalente a la acción de una fuerza puntual –*P* y de un momento flector –*PL* de tal forma que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t}^* = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad t_1^*\mathbf{e}_1 + t_2^*\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad \forall\mathbf{x}\big| x_1 = L \quad -h \le x_2 \le h \\
&\rightarrow \quad t_1^* = \sigma_{11}, \quad t_2^* = \sigma_{12} \\
&-P = \int_{-h}^{h} t_2^* b\, dx_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} b\, dx_2 \\
&-PL = \int_{-h}^{h} t_1^* x_2 b\, dx_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} x_2 b\, dx_2
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Después de evaluar la integral $-P = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} b\, dx_2$, y sustituir el valor de α_4 calculado en la Ecuación (6.54), se concluye que:

$$\alpha_7 = -\alpha_2 L \tag{6.56}$$

Este último resultado se verifica en las Ecuaciones (6.50) y (6.51).

Asimismo, se evalúa la integral $-PL = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} x_2 b\, dx_2$ y se concluye que:

$$\alpha_9 = -\frac{PL}{4bh^3} - \alpha_4 L \tag{6.57}$$

Después de sustituir la Ecuación (6.54) y en la última expresión, y de sustituir este resultado en la Ecuación (6.46), se obtiene:

$$\alpha_9 = 0 \quad , \quad \alpha_5 = 0 \tag{6.58}$$

Se remplaza la Ecuación (6.51) y la expresión anterior en la Ecuación (6.43). El resultado se sustituye en las ecuaciones (6.50) y (6.53), obteniendo lo siguiente:

$$\alpha_3 = 0 \quad , \quad \alpha_{10} = 0 \tag{6.59}$$

Los coeficientes de la función de Airy calculados se remplazan en la Ecuación (6.41), para obtener las siguientes componentes de esfuerzo:

$$\sigma_{11} = -\frac{3P}{2bh^3} x_1 x_2 \quad , \quad \sigma_{22} = 0 \quad , \quad \sigma_{12} = -\frac{3P}{4bh^3}\left(h^2 - x_2^2\right) \tag{6.60}$$

Este resultado coincide con la teoría de vigas de sección rectangular bajo las hipótesis de la resistencia de materiales, donde el momento de inercia alrededor del eje x_3 es $I_3 = bh^3/12$.

6.8. Principio de Saint – Venant

Una lámina rectangular de *b* por *2b* y espesor constante está sometida a una fuerza puntual que actúa a lo largo de su eje como lo muestra la **Figura 6.4**.

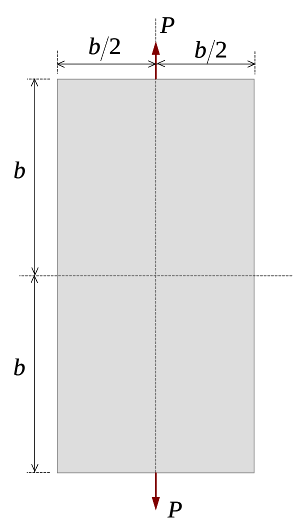


Figura 6.4. Lámina sometida a una fuerza distribuida en un área que tiende a cero.

Experimentalmente o mediante simulación numérica se concluye que la distribución del esfuerzo normal en el interior de la lámina no es uniforme cuando la distancia con respecto al borde es pequeña.

La **Figura 6.5** tomada de referencias anteriores (Timoshenko & Goodier 1970), muestra que el esfuerzo normal máximo a una distancia $b/4$ del borde superior es 2.575 veces más grande que el esfuerzo normal promedio $\sigma_{med} = P/A$.

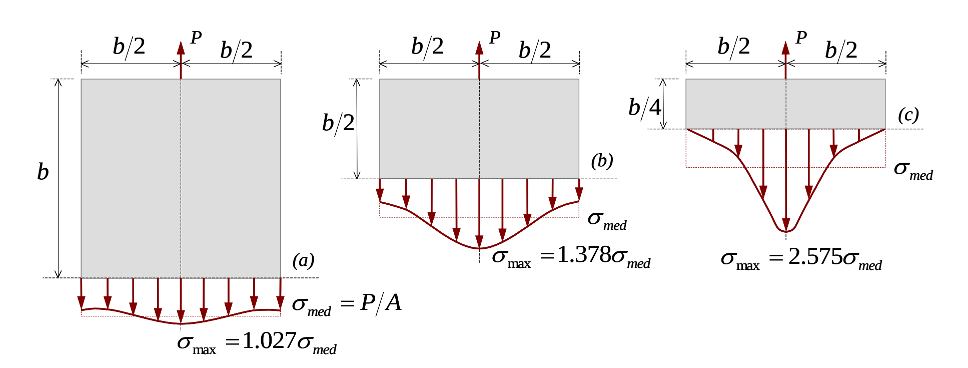


Figura 6.5. Principio de Saint – Venant. Distribución de esfuerzos a diferentes distancias en una lámina sometida a una fuerza distribuida en un área que tiende a cero.

Para distancias mayores a *b* la distribución tiende al valor constante del esfuerzo normal promedio.

La representación habitual del esfuerzo normal como el cociente entre la fuerza axial y el área de la sección es una aproximación válida a una distancia superior al ancho del elemento estructural.

En general, el principio de Saint – Venant establece que el campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo causados por sistemas de fuerzas estáticamente equivalentes son aproximadamente iguales, si actúan a distancias superiores a la dimensión mayor de la región sobre la cual está distribuida la fuerza. Asimismo, dos sistemas de fuerzas son estáticamente equivalentes si las resultantes, tanto de la fuerza como del momento, son iguales.

La **Figura 6.6** muestra la similitud obtenida en el estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_P, t_M)$ de un punto *P* alejado una distancia *d* del sistemas de fuerza $\mathbf{t}^{(I)}$, el cual es estáticamente equivalente con el sistema de fuerza $\mathbf{t}^{(II)}$.

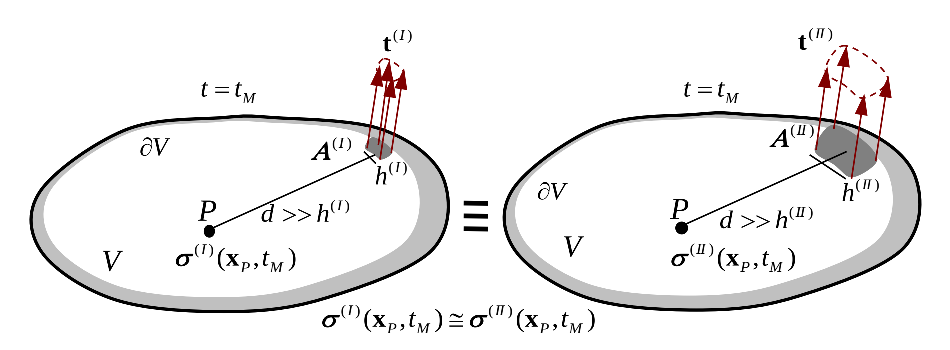


Figura 6.6. Principio de Saint – Venant. Similitud del estado de esfuerzos de un punto *P* alejado de una distancia *d* de dos sistemas de fuerza estáticamente equivalente.

Capítulo 7
Criterios de fallo material

Un *criterio de fallo material* establece el límite del comportamiento elástico y el inicio del proceso de *fluencia* en *materiales dúctiles* o de *fractura* en *materiales frágiles*. Tales criterios comparan el estado de esfuerzos (o de deformaciones) de un punto material, con un valor límite de esfuerzo (o de deformación), obtenido de ensayos experimentales unidimensionales. Habitualmente estos criterios se escriben en términos de las componentes principales de esfuerzo.

Para muchos casos se puede suponer que el material dúctil cede o el material frágil se fisura inmediatamente después de llegar a su límite elástico, es decir, que el comienzo del proceso de fluencia o de fractura está determinado por el final del comportamiento elástico.

Si la geometría y el sistema de fuerzas aplicadas sobre un sólido permiten considerar que el problema es unidimensional, el criterio de fallo indicará que todo punto material tiene un comportamiento elástico, si el valor escalar del esfuerzo $\sigma(\mathbf{x},t)$ es menor que el esfuerzo en el límite elástico dado por el ensayo experimental. Por ejemplo, si el material tiene una resistencia a la tracción σ_{ut} y a la compresión $-\sigma_{uc}$ como lo indica la **Figura 7.1(a)**, el régimen elástico de toda partícula del sólido estará delimitado por:

$$-\sigma_{uc} < \sigma(\mathbf{x},t) < \sigma_{ut} \tag{7.1}$$

El rango de valores de $\sigma(\mathbf{x},t)$ dado por la expresión anterior se puede representar gráficamente como lo indica la **Figura 7.1(b)**.

Sin embargo, el estado general de esfuerzos de cada partícula de un sólido está determinado por las 6 componentes de un tensor simétrico de segundo orden, lo cual requiere de medidas escalares de esfuerzo que

permitan comparar el comportamiento tridimensional de cada punto con la resistencia unidimensional del material.

El rango para el cual un estado de esfuerzos representa un comportamiento elástico de una partícula se denomina *dominio elástico* del criterio de fallo material (Simó & Hughes 1998). La región de color gris en la **Figura 7.1(b)** indica el dominio elástico de un criterio de fallo unidimensional. En general, el dominio elástico de un criterio de fallo material se representa mediante un volumen generado en un gráfico tridimensional, cuyos ejes corresponden a los esfuerzos principales.

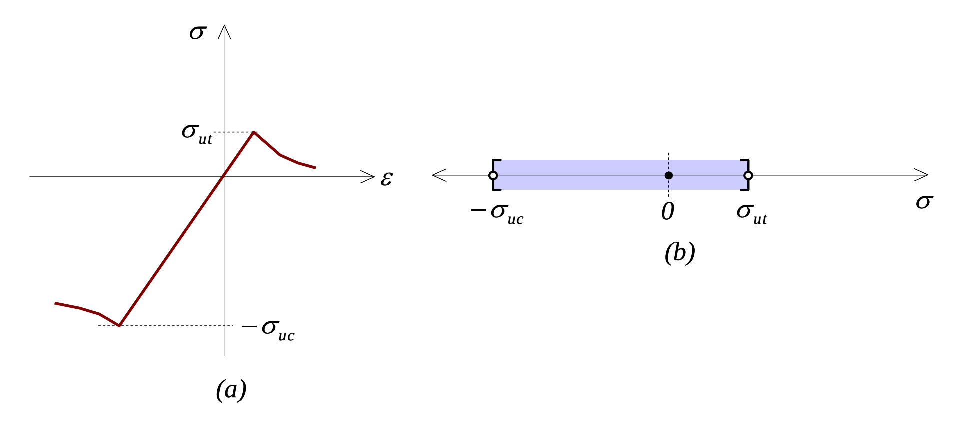


Figura 7.1. Criterios de fallo material: (a) curva esfuerzo – deformación de tracción y compresión uniaxial, (b) dominio elástico en un problema uniaxial.

En algunos materiales frágiles las primeras superficies de fractura son aproximadamente normales a la dirección principal mayor y la resistencia al esfuerzo normal a la tracción es pequeña. Algunos criterios de fractura consideran que las componentes principales de esfuerzo están limitadas por la resistencia a la tracción y a la compresión del material.

Muchos metales dúctiles muestran planos de deslizamiento en su estructura cristalina a lo largo de los cuales la resistencia a cortante es relativamente pequeña. Por lo tanto, algunos criterios de fluencia utilizados para tales metales limitan el valor del esfuerzo cortante.

En este capítulo se presentan algunos de los criterios de mayor aceptación en materiales dúctiles y frágiles, cuya resistencia a la tracción y a la compresión es la misma. Además se describen brevemente otros criterios útiles en materiales cuya resistencia a la tracción y a la compresión es diferente (Boresi, Schmidt et al. 1993; Popov 1998; Oliver & Agelet 2002).

7.1. Criterios para materiales con resistencias iguales a tracción y compresión

Algunos metales como hierro, cobre, aluminio y acero presentan esfuerzos de tracción y compresión similares en el límite de su comportamiento elástico. A continuación se presentan tres de los criterios de fallo material más utilizados.

7.1.1. Criterio del esfuerzo normal máximo

El *criterio del esfuerzo normal máximo* o también denominado *criterio de fractura de Rankine* es un indicador del inicio del proceso de fractura en materiales frágiles. Este criterio establece que la fractura en una partícula, comienza cuando el esfuerzo principal máximo alcanza la resistencia del material. Ésta última se define como el valor del esfuerzo normal al final del régimen elástico o inicio de la fractura en un ensayo uniaxial del material. Se considera que la resistencia del material es igual a σ_u en el ensayo de tracción y a $-\sigma_u$ en el ensayo a compresión, como lo indica la curva esfuerzo normal – deformación longitudinal de la **Figura 7.2(a)**.

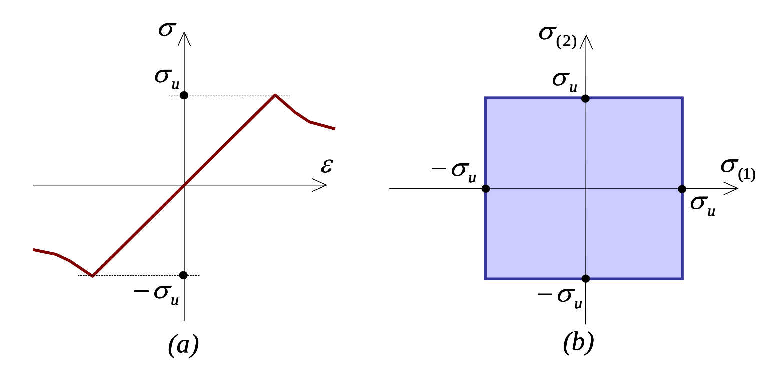


Figura 7.2. Criterios de fallo material: (a) curva esfuerzo – deformación de tracción y compresión uniaxial, (b) dominio elástico del criterio de fractura de Rankine para un estado plano de esfuerzos.

De acuerdo con el criterio de fractura de Rankine, un punto material tiene comportamiento elástico si su estado de esfuerzos dado por las componentes principales sin ordenar $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$ cumple las siguientes condiciones:

$$-\sigma_u < \sigma_{(1)} < \sigma_u \quad , \quad -\sigma_u < \sigma_{(2)} < \sigma_u \quad , \quad -\sigma_u < \sigma_{(3)} < \sigma_u \qquad (7.2)$$

Como lo muestra la **Figura 7.3**, el dominio elástico del criterio de Rankine se representa mediante un cubo en el espacio de los esfuerzos principales.

En condición plana de esfuerzos sobre el plano x_1x_2 para el cual $\sigma_{(3)} = 0$, el criterio de fractura de Rankine se reduce a:

$$-\sigma_u < \sigma_{(1)} < \sigma_u \quad , \quad -\sigma_u < \sigma_{(2)} < \sigma_u \qquad (7.3)$$

La región en color gris de la **Figura 7.2(b)** representa el dominio elástico del criterio, es decir, los estados de esfuerzo para los cuales el comportamiento es elástico.

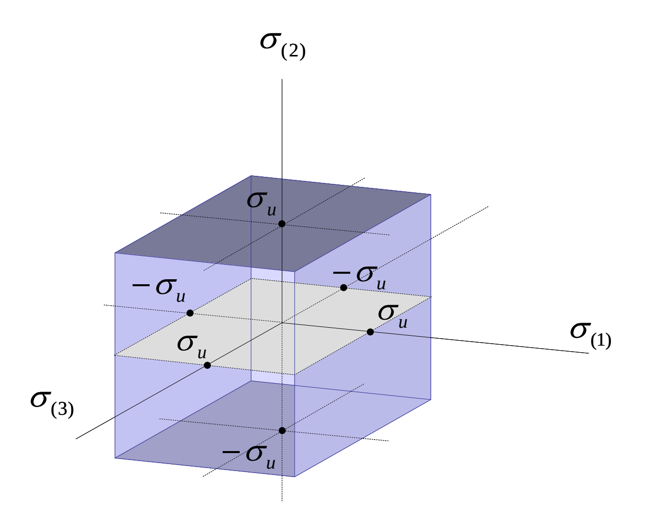


Figura 7.3. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de fractura de Rankine para un estado tridimensional de esfuerzos.

7.1.2. Criterio del esfuerzo cortante máximo

El *criterio del esfuerzo cortante máximo* o *criterio fluencia de Tresca* es un indicador del inicio del proceso de fluencia en materiales dúctiles, cuyo umbral de resistencia a tracción y a compresión es el mismo, como lo muestra curva esfuerzo normal – deformación longitudinal en la **Figura 7.4(a)**. Este criterio establece que la fluencia de un punto material, comienza cuando su esfuerzo cortante máximo es igual al esfuerzo cortante máximo obtenido en un ensayo uniaxial, que alcanza el

esfuerzo normal de fluencia σ_Y. Tal esfuerzo se presenta al final del régimen elástico o comienzo de la fluencia.

Como se obtuvo en el Apartado 2.10.2, el esfuerzo cortante máximo en función de las componentes principales de esfuerzo sin ordenar $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$, está definido por el valor máximo entre los tres esfuerzos cortantes máximos en cada plano coordenado dado por las siguientes expresiones:

$$\sigma_{S1}^{\max} = \tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right| \quad , \quad \sigma_{S2}^{\max} = \tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right| \qquad (7.4)$$
$$\sigma_{S3}^{\max} = \tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right|$$

En un ensayo uniaxial a tracción se obtiene una relación esfuerzo normal – deformación longitudinal, como la mostrada en el primer cuadrante de la **Figura 7.4(a)**. En el inicio de la fluencia, las componentes principales de esfuerzo son $\sigma_{(1)} = \sigma_Y$ y $\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$, de tal forma que el esfuerzo cortante máximo corresponderá a:

$$\sigma_{SY}^{\max} = \tfrac{1}{2}\sigma_Y \qquad (7.5)$$

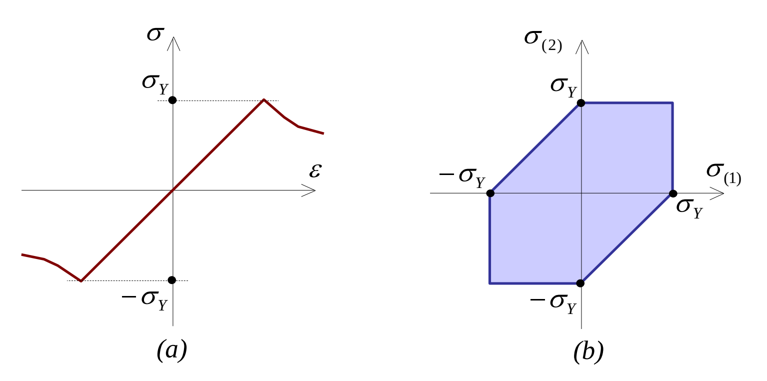


Figura 7.4. Criterios de fallo material: (a) curva esfuerzo normal – deformación longitudinal de tracción y compresión uniaxial, (b) dominio elástico del criterio de fluencia de Tresca para un estado plano de esfuerzos.

Asimismo, en un ensayo uniaxial de compresión, el esfuerzo normal al comienzo de la fluencia es igual a $-\sigma_Y$, en consecuencia $\sigma_{(3)} = -\sigma_Y$ y $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0$. Al igual que el ensayo a tracción, el valor del esfuerzo cortante máximo estará dado por la Ecuación (7.5).

De acuerdo con el criterio fluencia de Tresca para un estado tridimensional de esfuerzos, un punto material tiene comportamiento elástico, si el esfuerzo cortante máximo en cada plano es menor que el esfuerzo cortante máximo obtenido del ensayo uniaxial, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(2)}-\sigma_{(3)}\right|<\tfrac{1}{2}\sigma_Y \quad , \quad \tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)}-\sigma_{(3)}\right|<\tfrac{1}{2}\sigma_Y$$
$$\tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)}\right|<\tfrac{1}{2}\sigma_Y \tag{7.6}$$

Como lo muestra la **Figura 7.5(a)**, el dominio elástico del criterio de Tresca se representa en el espacio de los esfuerzos principales, mediante un prisma de longitud infinita, cuyo eje es la línea $\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_{(3)}$ y su sección transversal es un hexágono regular de 6 lados.

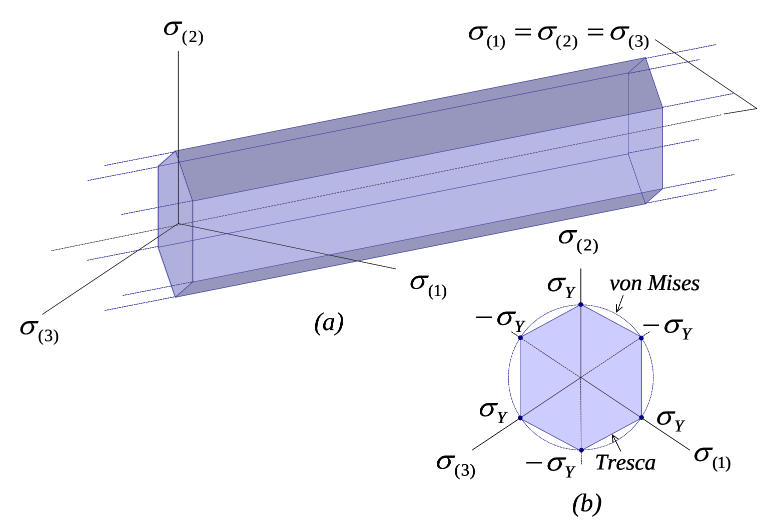


Figura 7.5. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de fluencia de Tresca para un estado tridimensional de esfuerzos: (a) vista general, (b) plano normal al eje hidrostático.

La **Figura 7.5(b)** presenta al prisma visto desde un plano normal al eje hidrostático $\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_{(3)}$.

En condición plana de esfuerzos sobre el plano x_1x_2 para el cual $\sigma_{(3)}=0$, el criterio de fluencia de Tresca se reduce a:

$$-\sigma_Y<\sigma_{(2)}<\sigma_Y \quad , \quad -\sigma_Y<\sigma_{(1)}<\sigma_Y$$
$$-\sigma_Y<\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)}<\sigma_Y \tag{7.7}$$

La región en color gris de la **Figura 7.4(b)** representa el dominio elástico del criterio, es decir, los estados de esfuerzo para los cuales el comportamiento es elástico.

7.1.3. Criterio de la densidad de energía de distorsión

El *criterio de la energía de distorsión* o *criterio fluencia de von Mises* es un indicador del inicio del proceso de fluencia en materiales dúctiles, cuyo umbral de resistencia a tracción y a compresión es el mismo. Este criterio establece que la fluencia de un punto material, comienza cuando la *densidad de energía de distorsión* es igual a la densidad de energía de distorsión obtenida en un ensayo uniaxial, el cual alcanza el esfuerzo normal de fluencia σ_Y. Dicho esfuerzo se presenta al final del régimen elástico o comienzo de la fluencia, como lo muestra curva esfuerzo normal – deformación longitudinal en la **Figura 7.4(a)**.

Para materiales elásticos lineales cuya ecuación constitutiva es de la forma $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, las componentes del tensor de esfuerzos se puede expresar como lo indica la Ecuación (5.5) así:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{7.8}$$

siendo $\hat{u}$ la energía de deformación por unidad de volumen. Integrando la expresión anterior con respecto al campo de la deformación se obtiene:

$$\hat{u} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} \tag{7.9}$$

Reemplazando la Ecuación (5.31) en la expresión anterior se establece una expresión de la energía de deformación por unidad de volumen en términos del esfuerzo, así:

$$\hat{u} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = -\frac{\nu}{2E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \tag{7.10}$$

Si las componentes de esfuerzo están definidas con respecto a un sistema coordenado principal, la densidad de energía de deformación en función de los esfuerzos principales se expresa como:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -\frac{\nu}{2E}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)^2 + \frac{1+\nu}{2E}\left(\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(3)}^2\right) \\ \hat{u} &= \frac{1}{2E}\left(\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(3)}^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}\sigma_{(3)} + \sigma_{(1)}\sigma_{(3)}\right) \end{aligned} \tag{7.11}$$

Todo estado de esfuerzos se puede descomponer como la suma tensorial de su parte esférica $\sigma_{ij}^{esf} = \sigma_M \delta_{ij}$ y su parte desviadora $\sigma_{ij}^{dev} = \sigma_{ij} - \sigma_M \delta_{ij}$, como se indicó en el Apartado 1.6.12. Por lo tanto, las componentes de la parte esférica y desviadora del tensor de esfuerzos referidas al sistema coordenado principal se puede escribir como:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}^{esf}] + [\boldsymbol{\sigma}^{dev}]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} - \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} - \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} - \sigma_M \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

siendo $\sigma_M = \frac{1}{3}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)})$.

De acuerdo a lo anterior, la densidad de energía de deformación se puede descomponer de la forma $\hat{u} = \hat{u}_{ext}(\sigma_{ij}^{esf}) + \hat{u}_{dis}(\sigma_{ij}^{dev})$. La *densidad de energía de deformación por extensión* $\hat{u}_{ext}$ corresponde a la energía producida por el tensor esférico de esfuerzos, la cual está asociada al cambio de volumen del sólido. Asimismo, la *densidad de energía de deformación por distorsión* $\hat{u}_{dis}$ es la energía generada por el tensor desviador de esfuerzos, la cual está asociada con el cambio de forma del sólido.

Sustituyendo en la Ecuación (7.11) a las componentes del tensor esférico de esfuerzos dadas en la Ecuación (7.12), se obtiene la siguiente expresión de la densidad de energía de deformación por extensión:

$$\hat{u}_{ext} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right)^2 \quad (7.13)$$

Asimismo, la densidad de energía de deformación por distorsión, indicada a continuación, se calculó reemplazando en la Ecuación (7.11) a las componentes del tensor desviador de esfuerzos de la Ecuación (7.12).

$$\hat{u}_{dis} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2\right] \quad (7.14)$$

Cuando comienza la fluencia en un ensayo uniaxial a tracción, las componentes principales de esfuerzo son iguales a $\sigma_{(1)} = \sigma_Y$ y $\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$, de tal forma que la densidad de energía de deformación por distorsión corresponde a:

$$\hat{u}_{dis}^{Y} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_Y^2 \quad (7.15)$$

En un ensayo uniaxial a compresión, donde $\sigma_{(3)} = -\sigma_Y$ y $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0$, el valor de $\hat{u}_{dis}^{Y}$ es igual al presentado en la Ecuación (7.15).

El criterio de fluencia de von Mises establece que un estado de esfuerzos de una partícula es elástico, si cumple con la condición expresada a continuación. La densidad de energía de deformación por distorsión del estado tridimensional, es menor que la respectiva densidad de energía obtenida en un ensayo uniaxial a tracción al inicio de la fluencia en el material, es decir,

$$\hat{u}_{dis} < \hat{u}_{dis}^{Y} \tag{7.16}$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.14) y (7.15) en la expresión anterior se concluye que:

$$(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2 < 2\sigma_Y^2 \tag{7.17}$$

Con el fin de facilitar la identificación del inicio de la fluencia en un punto material se define como *esfuerzo de von Mises* al campo escalar expresado de la forma:

$$\sigma_{vm} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2} \tag{7.18}$$

Por lo tanto, el dominio elástico de este criterio está limitado por la condición:

$$\sigma_{vm} < \sigma_Y \tag{7.19}$$

Dada la definición de esfuerzo cortante octaédrico τ_{oct} indicada en el Apartado 2.13, el esfuerzo de von Mises se puede escribir como:

$$\sigma_{vm} = \tfrac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \tag{7.20}$$

En consecuencia, el criterio de fluencia de von Mises se puede plantear en términos del esfuerzo cortante octaédrico como:

$$\tau_{oct} < \tfrac{\sqrt{2}}{3} \sigma_Y \tag{7.21}$$

Tal expresión también se denomina *criterio del esfuerzo cortante octaédrico máximo*.

Como se estableció en el Apartado 2.12, los valores principales del tensor de esfuerzos desviador se obtienen de la ecuación característica indicada en las expresiones (2.94) y (2.95), donde el segundo invariante del esfuerzo desviador J_2 es igual a:

$$J_2 = -\tfrac{1}{6}\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2\right] \qquad (7.22)$$

si las componentes de un tensor de esfuerzos están referidas a un sistema coordenado principal.

De la Ecuación (7.17) y la expresión anterior se tiene que el criterio de von Mises también se puede expresar como:

$$\sqrt{-3J_2} < \sigma_Y \qquad (7.23)$$

Dada la relación directa del criterio de fluencia con el segundo invariante del esfuerzo desviador, los modelos constitutivos que utilizan el criterio de von Mises se denominan *modelos de plasticidad* J_2 .

Como lo muestra la **Figura 7.6**, el dominio elástico del criterio de von Mises se representa mediante un cilindro del longitud infinita en el espacio de los esfuerzos principales, cuyo eje coincide con el eje hidrostático $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$.

En condición plana de esfuerzos sobre el plano $x_1 x_2$ para el cual $\sigma_{(3)} = 0$, el criterio de fluencia de von Mises se reduce a:

$$\sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}^2 < \sigma_Y^2 \qquad (7.24)$$

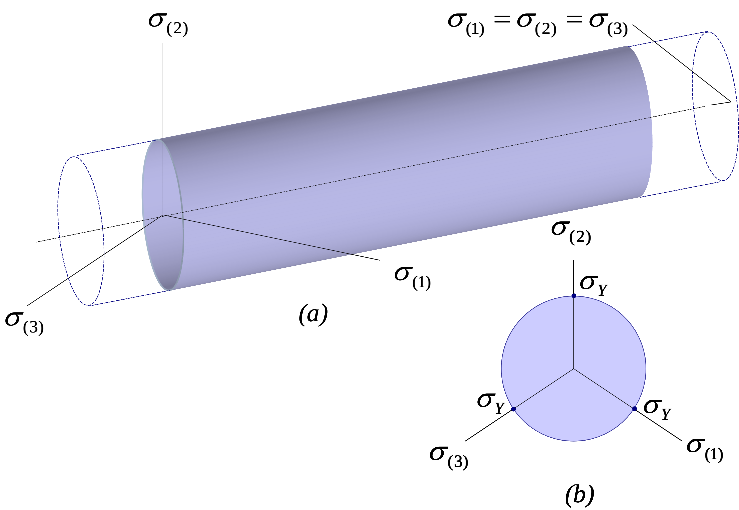


Figura 7.6. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de fluencia de von Mises para un estado tridimensional de esfuerzos: (a) vista general, (b) plano normal al eje hidrostático.

La región elíptica en color gris de la **Figura 7.7** representa el dominio elástico del criterio, es decir, los estados de esfuerzo para los cuales el comportamiento es elástico.

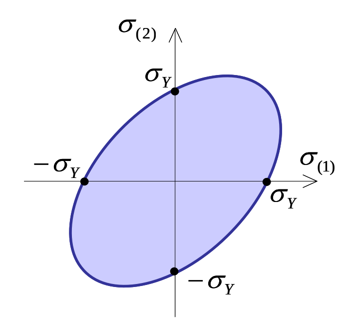


Figura 7.7. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de fluencia de von Mises para un estado plano de esfuerzos

7.1.4. Comparación entre los criterios Rankine, Tresca y von Mises

De la comparación los criterios de Rankine, Tresca y Von Mises en condición plana de esfuerzos, presentados en los apartados anteriores y mostrados en la **Figura 7.8**, se concluye lo siguiente:

- El criterio de Tresca es el más conservador de los tres porque tiene el dominio elástico más pequeño. El dominio elástico del criterio de von Mises es mayor que el dominio elástico del criterio de Rankine cuando los esfuerzos principales son del mismo signo, y sustancialmente menor cuando los esfuerzos principales son de signos contrarios.

- En un estado de esfuerzos uniaxial, el comienzo de la fluencia coincide para los tres criterios de fallo y corresponde a $(\sigma_{(1)},\sigma_{(2)}) = (\pm\sigma_Y,0)$ o $(\sigma_{(1)},\sigma_{(2)}) = (0,\pm\sigma_Y)$

- La mayor diferencia entre los criterios de fallo anteriores se observa en el estado de esfuerzo cortante puro donde $(\sigma_{(1)},\sigma_{(2)}) = (\tau,-\tau)$. Como se ilustra en la **Figura 7.8(b)**, el comienzo de la fluencia ocurre cuando $\tau = \sigma_Y$ en el criterio de Rankine, cuando $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y$ en el criterio de von Mises y cuando $\tau = \frac{1}{2}\sigma_Y$ en el criterio de Tresca.

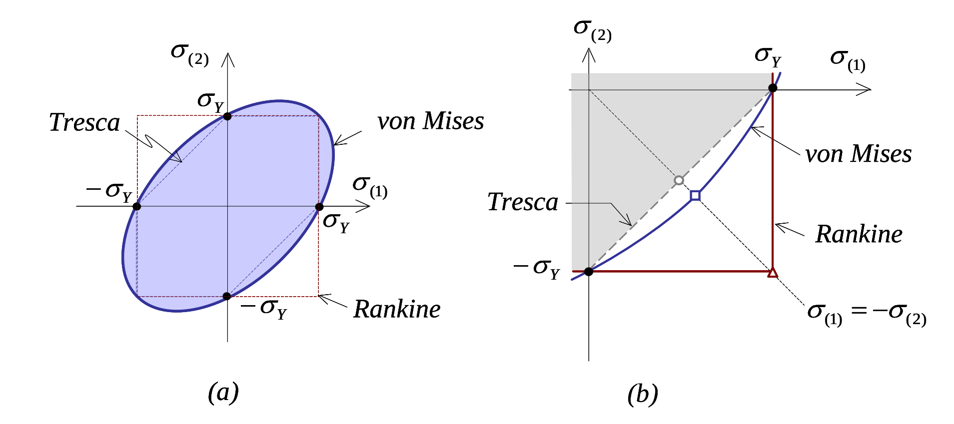


Figura 7.8. Comparación entre los criterios de Rankine, Tresca y von Mises: (a) dominio elástico en condición plana de esfuerzos, (b) detalle de un estado de esfuerzo cortante puro.

7.2. Criterios para materiales con resistencia a tracción y compresión diferentes

Algunos materiales de uso común como el concreto tienen un esfuerzo en el límite elástico diferente a tracción y a compresión como se muestra en la **Figura 7.9(a)**. A continuación se indican tres criterios de fractura que consideran dicha diferencia.

7.2.1. Criterio de Rankine modificado

Un planteamiento modificado del criterio de Rankine establece que el comienzo de la fractura ocurre cuando el esfuerzo principal mayor es igual al resistencia a tracción o a la compresión del material, por lo tanto, si el límite elástico de material está dado por un esfuerzo a tracción σ_{ut} diferente del esfuerzo a compresión σ_{uc}, como lo indica la curva esfuerzo normal – deformación longitudinal en la **Figura 7.9(a)**, todo punto material tiene comportamiento elástico si su estado de esfuerzos cumple las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_{uc} < \sigma_{(1)} < \sigma_{ut} \quad , \quad -\sigma_{uc} < \sigma_{(2)} < \sigma_{ut} \\
&-\sigma_{uc} < \sigma_{(3)} < \sigma_{ut}
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

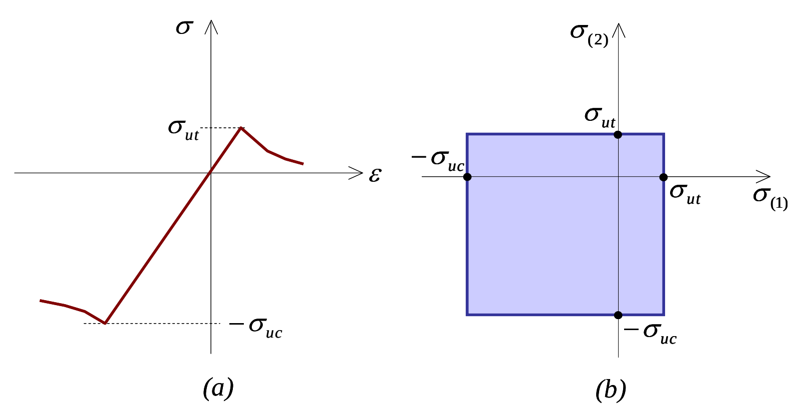


Figura 7.9. Criterios de fallo material: (a) curva esfuerzo normal – deformación longitudinal de tracción y compresión uniaxial, (b) dominio elástico del criterio de Rankine para un estado plano de esfuerzos con tracción y compresión diferenciada.

En condición plana de esfuerzos sobre el plano x_1x_2 para el cual $\sigma_{(3)} = 0$, el criterio general de fractura de Rankine se reduce a:

$$-\sigma_{uc} < \sigma_{(1)} < \sigma_{ut} \quad , \quad -\sigma_{uc} < \sigma_{(2)} < \sigma_{ut} \tag{7.26}$$

La región en color gris de la **Figura 7.9(b)** representa el dominio elástico del criterio, es decir, los estados de esfuerzo para los cuales el comportamiento es elástico.

7.2.2. Criterio de Mohr – Coulomb

La línea recta tangente a dos círculos de Mohr que representan los ensayos de tracción y compresión uniaxial se denomina *envolvente de fallo* y define el límite del comportamiento elástico del material, como se muestra en la **Figura 7.10**. La envolvente de fallo indica que el esfuerzo cortante máximo obtenido de los dos ensayos uniaxiales al comienzo de la fractura es igual a:

$$\sigma_S^{\max} = \tilde{c} - \sigma_N \tan\tilde{\phi} \tag{7.27}$$

siendo $\tilde{c}$ la cohesión y $\tilde{\phi}$ el ángulo de rozamiento interno del material. El valor de $\sigma_S^{\max}$ también se puede expresar en función del esfuerzo a tracción σ_{ut} y a compresión σ_{uc} en el límite elástico del material, como se presenta a continuación.

Considerando que el esfuerzo cortante máximo de un estado tridimensional es $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})$ como lo muestra la **Figura 7.10**, el valor

del esfuerzo cortante máximo obtenido de los ensayos uniaxiales al comienzo de la fractura es igual a:

$$\alpha_a \sigma_{ut} - \tfrac{1}{2}\alpha_b \left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}\right) \text{ donde,}$$

$$\alpha_a = \frac{m}{m+1} \quad , \quad \alpha_b = \frac{m-1}{m+1} \quad , \quad m = \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{ut}} \tag{7.28}$$

De manera similar al criterio de Tresca, el *criterio de Mohr – Coulomb* establece que un punto material tiene comportamiento elástico si el esfuerzo cortante máximo es menor que el esfuerzo cortante máximo obtenido de la envolvente de fallo, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}\right| < \alpha_a \sigma_{ut} - \tfrac{1}{2}\alpha_b \left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}\right) \tag{7.29}$$

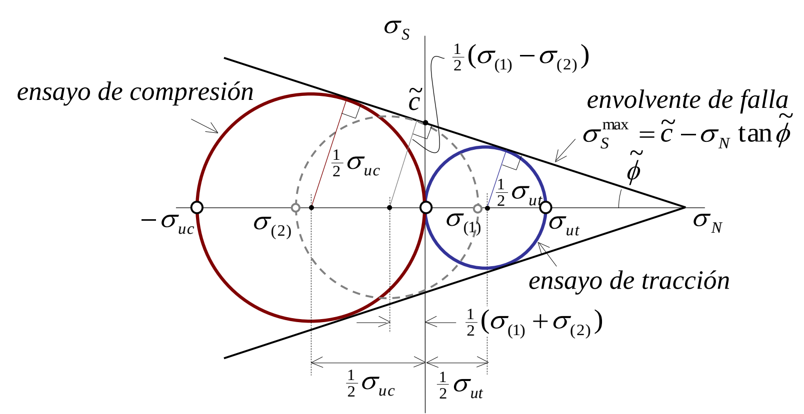


Figura 7.10. Criterios de fallo material: Círculos de Mohr y envolvente de fallo.

Ahora, si el esfuerzo cortante máximo de un estado tridimensional es $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})$, el criterio se satisface cuando:

$$\tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}\right| < \alpha_a \sigma_{ut} - \tfrac{1}{2}\alpha_b \left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(3)}\right) \tag{7.30}$$

y finalmente, si el esfuerzo cortante máximo de un estado tridimensional es $\frac{1}{2}(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})$, la condición es de la forma:

$$\tfrac{1}{2}\left|\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}\right| < \alpha_a \sigma_{ut} - \tfrac{1}{2}\alpha_b \left(\sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right) \tag{7.31}$$

En conclusión, las ecuaciones (7.29), (7.30) y (7.31) definen el criterio de Mohr – Coulomb para un estado tridimensional de esfuerzos.

Como lo muestra la **Figura 7.11**, el dominio elástico de este criterio se representa mediante una pirámide de altura infinita, cuyo eje corresponde con la línea $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ en el espacio de los esfuerzos principales.

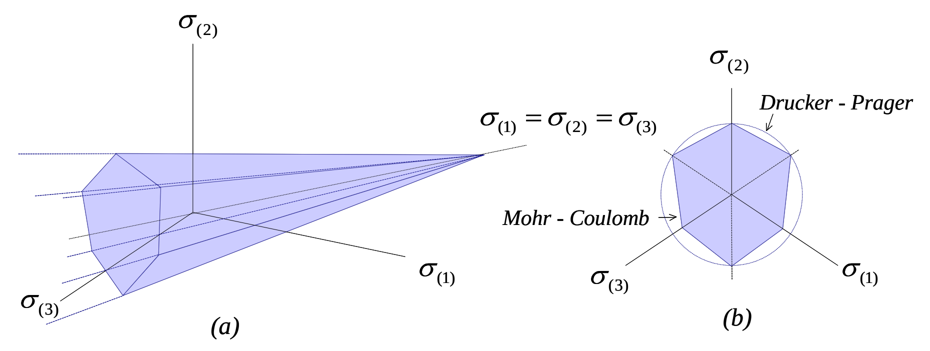


Figura 7.11. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de Mohr – Coulomb para un estado tridimensional de esfuerzos: (a) vista general, (b) plano normal al eje hidrostático.

A partir de las tres expresiones anteriores, en un problema simplificado a un estado plano de esfuerzos en el cual $\sigma_{(3)} = 0$, éste criterio se reduce a:

$$\begin{aligned} m\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)} < m\sigma_{ut} \quad &, \quad \sigma_{(1)} - m\sigma_{(2)} > -m\sigma_{ut} \\ -m\sigma_{ut} &< \sigma_{(1)} < \sigma_{ut} \\ -m\sigma_{ut} &< \sigma_{(2)} < \sigma_{ut} \end{aligned} \tag{7.32}$$

La **Figura 7.12** ilustra el dominio elástico asociado al criterio en condición plana de esfuerzos, donde se observa su similitud con el criterio de Rankine cuando los esfuerzos principales son del mismo signo, y su variación lineal cuando los esfuerzos principales son de signos contrarios.

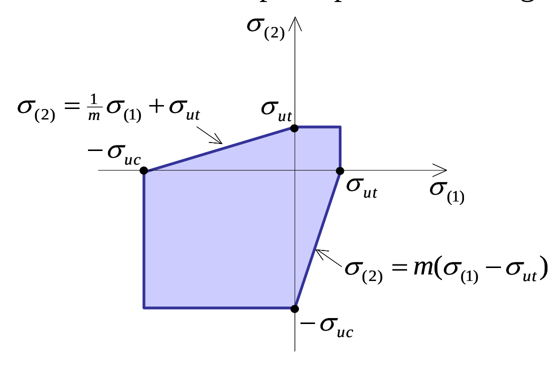


Figura 7.12. Criterios de fallo material: dominio elástico del criterio de Mohr-Coulomb para un estado plano de esfuerzos con tracción y compresión diferenciada.

Para el caso particular en el cual los esfuerzos a tracción y compresión en el límite elástico son iguales, es decir $m = 1$, el dominio elástico coincide con el obtenido en el criterio de Tresca.

7.2.3. Criterio de Drucker – Prager

El *criterio de Drucker – Prager* es una generalización del criterio de von Mises que incluye la parte esférica del estado de esfuerzos y por lo tanto la energía de deformación por extensión de un punto material.

Se puede definir el *esfuerzo de Drucker – Prager* como un esfuerzo equivalente particular de este criterio de la forma:

$$\sigma_{dp} = \alpha\, I_1 + \sqrt{-J_2} \tag{7.33}$$

donde α es el coeficiente de fricción interna del material, I_1 es el primer invariante del tensor de esfuerzos y J_2 es el segundo invariante del tensor de esfuerzos desviadores, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \sigma_{dp} &= \alpha\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right) + \\ &+ \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{7.34}$$

El *criterio de Drucker – Prager a partir de ensayos uniaxiales* establece que la fractura de un punto material, comienza cuando el esfuerzo de Drucker – Prager en un estado tridimensional σ_{dp} es igual al esfuerzo de Drucker – Prager $\sigma_{dp}^{\max}$ obtenido en dos ensayos uniaxiales, los cuales alcanzan el esfuerzo límite a tracción uniaxial σ_{ut} y el esfuerzo límite a compresión uniaxial σ_{uc}.

Sustituyendo las componentes principales de esfuerzo $\sigma_{(1)} = \sigma_{ut}, \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$ en la Ecuación (7.34), se obtiene el esfuerzo de Drucker – Prager cuando comienza la fractura en un ensayo de tracción de la forma:

$$\sigma_{dp}^{\max} = (\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{3}})\sigma_{ut} \tag{7.35}$$

De igual manera, cuando comienza la fractura en un ensayo a compresión, las componentes de esfuerzo principal son $\sigma_{(1)} = -\sigma_{uc}, \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$ y en consecuencia el esfuerzo de Drucker – Prager es igual a:

$$\sigma_{dp}^{\max} = (-\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{3}})\sigma_{uc} \tag{7.36}$$

Igualando las Ecuaciones (7.35) y (7.36), se obtiene el coeficiente de fricción interna y el esfuerzo máximo de Drucker – Prager de la forma:

$$\alpha = \frac{(m-1)}{\sqrt{3}(m+1)} \quad , \quad \sigma_{dp}^{\max} = \frac{2m\sigma_{ut}}{\sqrt{3}(m+1)} \quad , \quad m = \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{ut}} \tag{7.37}$$

Como se indica en la siguiente ecuación, los parámetros anteriores también se pueden calcular a partir de la cohesión $\tilde{c}$ y del ángulo de fricción interna del material $\tilde{\phi}$ mostrada en la **Figura 7.10**.

$$\alpha = \frac{2\sin\tilde{\phi}}{\sqrt{3}\left(3-\sin\tilde{\phi}\right)} \quad , \quad \sigma_{dp}^{\max} = \frac{6\tilde{c}\cos\tilde{\phi}}{\sqrt{3}\left(3-\sin\tilde{\phi}\right)} \tag{7.38}$$

En este criterio todo punto material tiene comportamiento elástico si su estado de esfuerzos cumple con la siguiente condición:

$$\sigma_{dp} < \sigma_{dp}^{\max} \tag{7.39}$$

es decir,

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}\right) + \\ &+ \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})^2\right]^{\frac{1}{2}} < \sigma_{dp}^{\max} \end{aligned} \tag{7.40}$$

Como lo muestra la **Figura 7.13**, este criterio se representa mediante un cono cuyo eje corresponde con la línea $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ en el espacio de los esfuerzos principales.

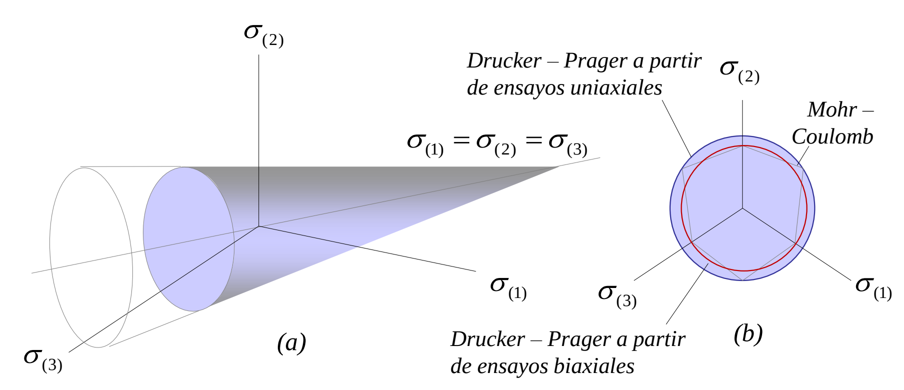


Figura 7.13. Criterios de fallo material. Dominio elástico del criterio de Drucker – Prager para un estado tridimensional de esfuerzos: (a) vista general, (b) plano normal al eje hidrostático.

En condición plana de esfuerzos sobre el plano $x_1 x_2$ para el cual $\sigma_{(3)} = 0$, el criterio Drucker – Prager se reduce a:

$$\alpha\left(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}^2\right]^{\frac{1}{2}} < \sigma_{dp}^{\max} \tag{7.41}$$

La región mostrada en la **Figura 7.14(a)** y **(b)** corresponde a todo estado plano de esfuerzos para el cual el comportamiento del material es elástico de acuerdo con el criterio de Drucker – Prager. La diferencia con el criterio de Mohr – Coulomb indicado con la línea clara es importante cuando ambos esfuerzos principales son negativos.

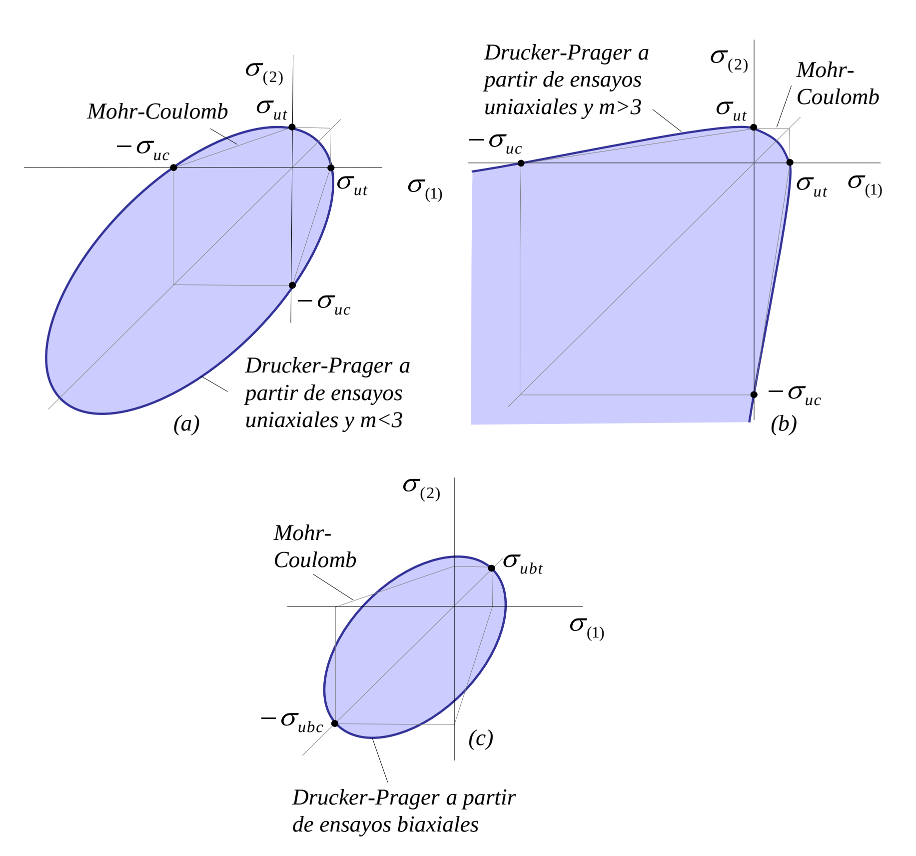


Figura 7.14. Criterios de fallo material: dominio elástico del criterio de Drucker – Prager, para un estado plano de esfuerzos con tracción y compresión diferenciada: (a) a partir de ensayos uniaxiales con relación entre resistencias menor a 3, (b) a partir de ensayos uniaxiales con relación entre resistencias mayor a 3 y (c) a partir de ensayos biaxiales.

En general, el factor *m* determina si la función del contorno del dominio elástico es elíptica, parabólica o hiperbólica. Para valores de *m* superiores a 3 la función es hiperbólica mostrando un dominio infinito

cuando los esfuerzos principales son negativos, como se ilustra en la **Figura 7.14(b)**. En cambio si $m < 3$ la función puede ser parabólica o elíptica, como lo se observa en la **Figura 7.14(a)**. Para el caso particular en el cual los esfuerzos a tracción y compresión en el límite elástico son iguales, es decir $m = 1$, el dominio elástico coincide con el obtenido en el criterio de von Mises.

Con el fin de acotar el dominio elástico en compresión biaxial cuando la relación entre las resistencias es mayor a 3, se define la siguiente modalidad en el criterio.

El *criterio de Drucker – Prager a partir de ensayos biaxiales* establece que la fractura de un punto material comienza, cuando el esfuerzo de Drucker – Prager en un estado tridimensional σ_{dp} es igual al esfuerzo de Drucker – Prager $\sigma_{dp}^{\max}$ obtenido en dos ensayos biaxiales donde $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)}$, los cuales alcanzan un esfuerzo límite biaxial a tracción σ_{ubt} y el esfuerzo límite biaxial a compresión σ_{ubc}.

Sustituyendo las componentes principales de esfuerzo $\sigma_{(1)} = \sigma_{ubt}, \sigma_{(2)} = \sigma_{ubt}, \sigma_{(3)} = 0$ en la Ecuación (7.34), se obtiene el esfuerzo de Drucker – Prager cuando comienza la fractura en un ensayo de tracción biaxial de la forma:

$$\sigma_{dp}^{\max} = (2\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{3}})\sigma_{ubt} \tag{7.42}$$

De igual manera, cuando comienza la fractura en un ensayo a compresión biaxial, las componentes de esfuerzo principal son $\sigma_{(1)} = -\sigma_{ubc}, \sigma_{(2)} = -\sigma_{ubc}, \sigma_{(3)} = 0$ y en consecuencia el esfuerzo de Drucker – Prager es igual a:

$$\sigma_{dp}^{\max} = (-2\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{3}})\sigma_{ubc} \tag{7.43}$$

Igualando las ecuaciones (7.42) y (7.43), se obtiene el coeficiente de fricción interna y el esfuerzo máximo de Drucker – Prager de la forma:

$$\alpha = \frac{(m_p - 1)}{2\sqrt{3}(m_p + 1)} \quad , \quad \sigma_{dp}^{\max} = \frac{2 m_p \sigma_{ubt}}{\sqrt{3}(m_p + 1)} \quad , \quad m_p = \frac{\sigma_{ubc}}{\sigma_{ubt}} \tag{7.44}$$

El plano normal al eje hidrostático en estados de esfuerzos tridimensionales de la **Figura 7.13(b)**, ilustra el contorno de la superficie de fallo de este criterio a partir de los ensayos biaxiales. Se observa un dominio elástico menor que el obtenido a partir de ensayos uniaxiales.

Asimismo, la **Figura 7.14(c)** muestra el dominio elástico en condición plana de esfuerzos del criterio de Drucker – Prager a partir de los ensayos biaxiales, independiente de la relación entre resistencias m_p.

Capítulo 8
Torsión pura en barras prismáticas

Este capítulo describe el comportamiento elástico lineal de una barra prismática de sección transversal arbitraria sometida a torsión pura a lo largo de su eje longitudinal, mediante el método Semi – inverso de Saint – Venant (Lai & Saibel 1965; Timoshenko & Goodier 1970; Ortiz 1998). Este método permite calcular los esfuerzos y las deformaciones producidas por torsión pura para todo punto material del sólido.

Coulomb en 1784 estableció el comportamiento de barras de sección circular sometida a torsión y demostró la ausencia de *alabeo*. Posteriormente Navier en 1826 generalizó de forma aproximada lo propuesto por Coulomb para cualquier forma de sección transversal. Finalmente en 1855, Saint – Venant preocupado por la importancia del alabeo, elaboró un método para calcular esfuerzos, basado en la analogía de la membrana propuesta por Prandtl.

Con excepción de las barras prismáticas de sección circular y de los miembros de pared delgada, los elementos sometidos a torsión pura presentan *alabeo*, es decir, las secciones planas antes de aplicar el momento torsor, no se mantienen planas en su condición deformada como lo indica la **Figura 8.1**.

El método Semi-inverso está planteado para cualquier geometría de la sección transversal, sin embargo analíticamente solo se ha llegado a establecer la solución para secciones transversales sencillas como elípticas, rectangulares y triangulares. Utilizando el *método de los elementos finitos* no hay limitaciones en la forma de la sección transversal de la barra.

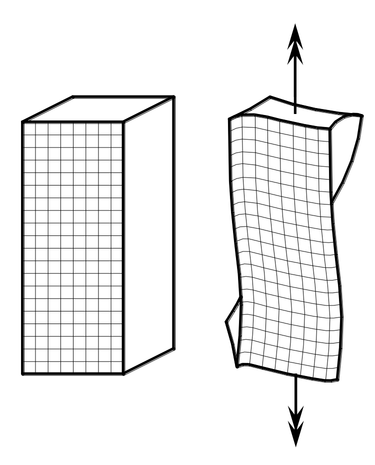


Figura 8.1. Deformación de una barra de sección transversal rectangular sometida a torsión pura.

La primera hipótesis establece que la configuración deformada de cualquier sección recta es un giro alrededor del eje longitudinal de la barra, acompañado de un alabeo igual en todas las secciones.

En la **Figura 8.2** las líneas punteadas muestran la barra antes de aplicar los momentos torsionales, mientras que las líneas continuas indican su condición deformada. En el plano $x_2 x_3$ se observa un grupo de curvas paralelas entre sí que describen la componente del desplazamiento en dirección x_3 denominada alabeo e indicada como u_3.

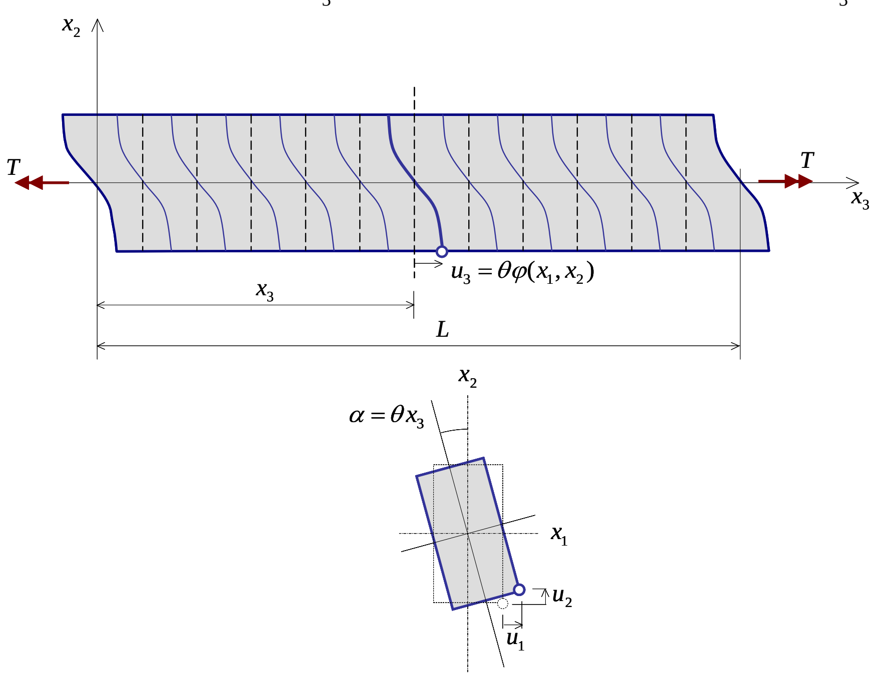


Figura 8.2. Alabeo y giro de la sección transversal de una barra sometida a torsión pura.

Al mismo tiempo, en el plano x_1x_2 se muestra un desplazamiento angular α de toda la sección transversal.

La segunda hipótesis afirma que el ángulo de giro de la sección varía linealmente con respecto a x_3, siendo θ es el ángulo de torsión por unidad de longitud. En la **Figura 8.3** se observa como la sección transversal a una distancia x_3, ha girado un ángulo $\alpha = \theta x_3$ con respecto a la sección del extremo izquierdo de la barra. En consecuencia, el valor máximo del ángulo de torsión se obtiene cuando x_3 es igual *L*.

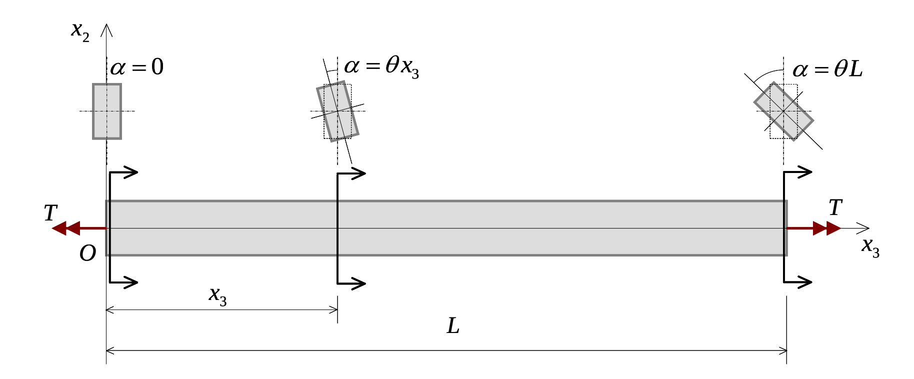


Figura 8.3. Ángulo de giro de la sección transversal de una barra sometida a torsión.

8.1. Definición del campo de los desplazamientos

A continuación se define el vector de desplazamiento $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ en cada punto material de una barra prismática sometida a torsión.

El alabeo u_3 mostrado en la **Figura 8.2**, es igual en todas las secciones, reflejando su independencia con respecto a la posición x_3. Asimismo, u_3 es directamente proporcional al ángulo de torsión por unidad de longitud θ y en consecuencia puede expresarse como:

$$u_3(x_1, x_2) = \theta \varphi(x_1, x_2) \qquad (8.1)$$

siendo $\varphi(x_1, x_2)$ la función continua definida en el espacio de toda sección transversal denominada *función de alabeo*.

Después de aplicado el momento torsor sobre el eje de la barra, la sección transversal gira un ángulo de magnitud α, mientras que un punto material *A* se desplaza a una posición *B*, como se indica en la **Figura**

8.4(a). La trayectoria del desplazamiento AB se puede considerar aproximadamente igual al arco dado por el radio ρ y el ángulo θ, de la forma:

$$\delta \cong \rho\alpha = \rho\theta x_3 \tag{8.2}$$

La **Figura 8.4(b)** muestra las componentes del desplazamiento u_1, u_2 en el plano $x_1 x_2$, las cuales corresponden a:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\delta \sin\beta = -\rho\theta x_3 \sin\beta \\ u_2 &= \delta \cos\beta = \rho\theta x_3 \cos\beta \end{aligned} \tag{8.3}$$

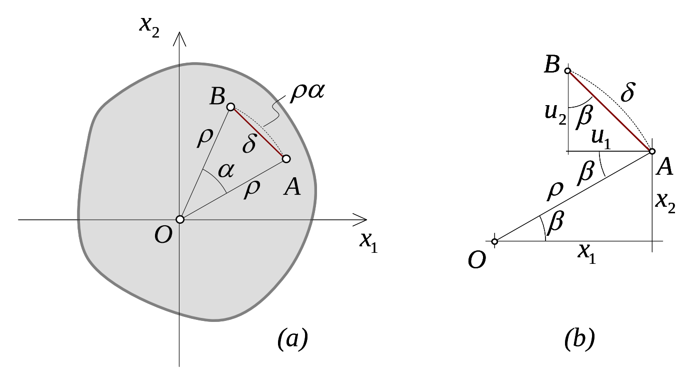


Figura 8.4. Desplazamiento de un punto material de la sección transversal de una barra sometida a torsión pura: (a) vista general, (b) detalle de la relación de ángulos.

Dado que las componentes del vector posición del punto A en la sección transversal son iguales a:

$$x_1 = \rho\cos\beta \quad , \quad x_2 = \rho\sin\beta \tag{8.4}$$

las componentes de desplazamiento corresponden a:

$$\begin{aligned} u_1(x_2, x_3) &= -\theta x_2 x_3 \\ u_2(x_1, x_3) &= \theta x_1 x_3 \\ u_3(x_1, x_2) &= \theta\varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{8.5}$$

8.2. Relación deformación – desplazamiento

Como se indicó en el Apartado 6.1.2, las componentes del campo tensorial de la deformación infinitesimal se pueden expresar en función del campo vectorial de los desplazamientos. Sustituyendo la Ecuación (8.5) en la Expresión (6.3) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\
\gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \theta\left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \\
\gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \theta\left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \\
\gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Se observa que las únicas componentes de deformación diferentes de cero son las deformaciones tangenciales en los planos $x_2 x_3$ y $x_1 x_3$.

8.3. Relación esfuerzo – deformación

Como se indicó en el Apartado 6.1.3, para un material de comportamiento elástico lineal isótropo, las componentes del campo tensorial de los esfuerzos se pueden expresar en términos de las componentes del tensor de deformaciones infinitesimales. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación constitutiva (6.5) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} = 0 \\
&\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = 0 \\
&\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} = 0 \\
&\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} = \mu\gamma_{23} = \mu\theta\left(x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) \\
&\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} = \mu\gamma_{13} = \mu\theta\left(-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) \\
&\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12} = 0
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

Con el resultado anterior se demuestra una de las consideraciones planteada por el método de Saint-Venant, la cual establece la presencia exclusiva de los esfuerzos cortantes σ_{23} y σ_{13}.

8.4. Ecuaciones de equilibrio

Sustituyendo las componentes de esfuerzo en las ecuaciones de equilibrio estático para un punto material presentadas en el Apartado 6.1.1, se llega al siguiente resultado despreciando las fuerzas de cuerpo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu\theta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

De la última expresión se obtiene una ecuación diferencial en términos de la función de alabeo. Dado que las condiciones de borde de la función de alabeo son desconocidas no es posible solucionar tal ecuación diferencial.

Se define la *función de Prandtl* como una función escalar continua $\phi(x_1, x_2)$, cuyas derivadas con respecto a la posición determinan las componentes de esfuerzo cortante así:

$$
\sigma_{23} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \quad , \quad \sigma_{13} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \tag{8.9}
$$

Derivando las componentes de esfuerzo σ_{23} y σ_{13} con respecto a x_1 y a x_2 respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \mu\theta\left(1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \mu\theta\left(-1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{8.10}$$

Sumando las derivadas de la función ϕ, con el fin de eliminar la derivada de la función de alabeo φ, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = -\mu\theta\left(1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \mu\theta\left(-1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = -2\mu\theta \tag{8.11}$$

Ordenando los términos de la expresión anterior, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden en términos de la función de Prandtl:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + 2\mu\theta = 0 \tag{8.12}$$

Dicha función tiene condiciones de borde definidas en el contorno del dominio de la ecuación diferencial.

8.5. Condiciones de borde

Se considera como condición de borde que las fuerzas de superficie sobre el contorno del sólido son nulas, por lo tanto, el vector tracción que actúa sobre una superficie de normal **n** en el contorno debe ser igual a cero, es decir:

$$t_j^* = t_j^{(n)} = n_i \sigma_{ij} = 0 \quad \forall x_i \in \partial V \tag{8.13}$$

Las componentes del vector normal al contorno corresponden a:

$$n_1 = \cos\theta_n \quad , \quad n_2 = \sin\theta_n \quad , \quad n_3 = 0 \tag{8.14}$$

siendo θ_n el ángulo conformado entre el eje x_1 y el vector **n** como se muestra en la **Figura 8.5(a)**. De acuerdo con las relaciones trigonométricas dadas en el elemento diferencial sobre el contorno

indicado en la **Figura 8.5(b)**, las componentes de **n** se pueden escribir de la forma:

$$n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial s} \quad , \quad n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial s} \quad , \quad n_3 = 0 \tag{8.15}$$

Sustituyendo la expresión anterior y la Ecuación (8.9) en la Ecuación (8.13), se tiene:

$$\begin{aligned} n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} = 0 \quad &\rightarrow \quad 0 = 0 \\ n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32} = 0 \quad &\rightarrow \quad 0 = 0 \\ n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33} = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial x_2}{\partial s}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \tag{8.16}$$

A partir de la ecuación anterior, siendo $\phi(x_1, x_2)$ es una función de x_1, x_2 y de acuerdo con la regla de la cadena para derivadas parciales, se concluye que la condición de borde es de la forma:

$$\frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} = 0 \quad \forall s(x_1, x_2) \in \partial V \tag{8.17}$$

donde se observa que la función de Prandtl es constante para todo punto material que hace parte del contorno del sólido ∂V. Por comodidad y en concordancia con la *analogía de la membrana* se acostumbra a adoptar un valor de cero de la función de Prandtl en el contorno de la sección transversal de la barra.

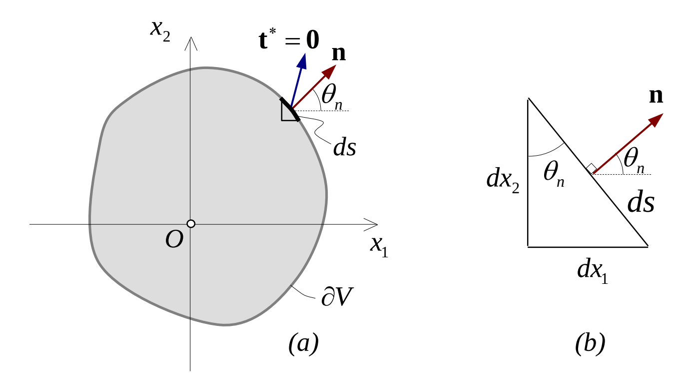


Figura 8.5. Condiciones de borde: (a) vista general de la sección transversal de la barra, (b) detalle del elemento diferencial en el contorno del sólido.

8.6. Analogía de la membrana

La analogía de la membrana fue desarrollada por Prandtl, con el fin de asociar la forma de una membrana sometida a presión uniforme, con el comportamiento de la función de esfuerzos en el problema de torsión pura.

En la **Figura 8.6** se muestra una membrana homogénea fija en los bordes, a la cual se le aplica una presión uniforme hacia arriba. Si q es la presión y F_q es la tensión en los bordes, la ecuación diferencial que establece el desplazamiento z de la membrana es igual a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{q}{F_q} = 0 \tag{8.18}$$

teniendo como condición de borde que el desplazamiento en z en el contorno es igual a cero.

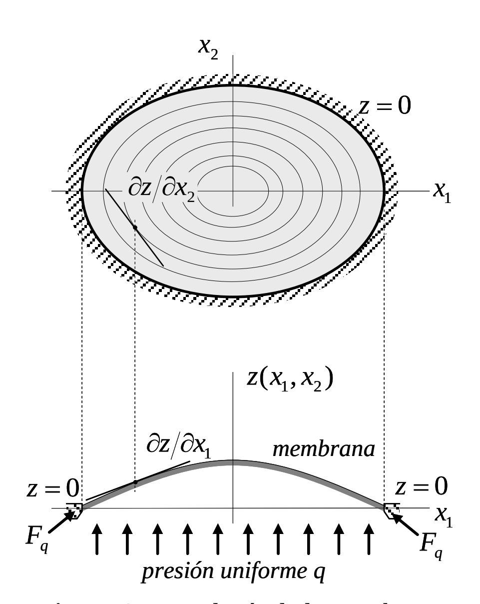


Figura 8.6. Analogía de la membrana

La ecuación diferencial y las condiciones de borde que rigen el problema de torsión pura y el de la membrana son análogas entre sí. Entonces, es posible considerar como condición de borde del fenómeno de torsión un valor de $\phi(x_1, x_2)$ igual a cero en el contorno, con el fin de acercar más la analogía de la membrana al problema en cuestión.

Las pendientes de la membrana después de aplicada la presión uniforme $z(x_1, x_2)$ con respecto a x_1 y x_2, dadas por las derivadas

$\partial z/\partial x_1$ y $\partial z/\partial x_2$, son análogas a los valores de esfuerzo cortante $-\sigma_{23}$ y σ_{13} en el problema de torsión pura de barras prismáticas.

8.7. Momento torsor

El momento externo T aplicado alrededor del eje longitudinal de la barra, debe ser igual al momento interno generado por los esfuerzos cortantes σ_{23} y σ_{13}. Como se muestra en la **Figura 8.7**, en un elemento diferencial de área sobre la sección transversal se producen las fuerzas internas $dF_1 = \sigma_{23} dA$ y $dF_2 = \sigma_{13} dA$, que a su vez generan los siguientes momentos internos.

$$dT = dT_1 + dT_2 = (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA \tag{8.19}$$

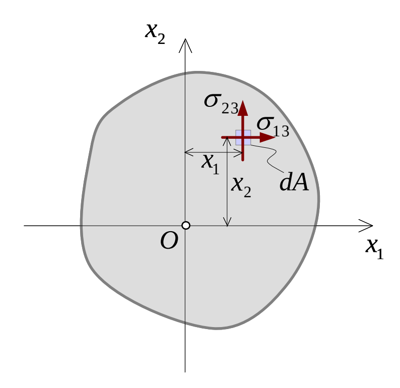


Figura 8.7. Momento interno producido por los esfuerzos cortantes en un elemento diferencial de área sobre la sección transversal de la barra.

Igualando el momento externo con el momento interno en toda el área de la sección transversal, se obtiene:

$$\begin{aligned} T &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA = \int_A \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) dA \\ T &= -\iint \frac{\partial \phi}{\partial x_1} x_1 \, dx_1 \, dx_2 - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \, dx_1 \, dx_2 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Sean h y v dos funciones continuas, la integración por partes establece que:

$$\int h\,dv = -\int v\,dh + hv \tag{8.21}$$

Aplicando la expresión anterior, se tiene que los términos a la derecha de la igualdad en la Ecuación (8.20) corresponden a:

$$\begin{aligned}
&-\int\left(\int x_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1\right)dx_2 = -\int\left(-\int \phi dx_1 + x_1\phi\right)dx_2 \\
&= \iint \phi\, dx_1\, dx_2 - \int x_1\phi\, dx_2 = \iint \phi dx_1\, dx_2 - \int x_1\phi \cos\theta_n\, ds \\
&-\int\left(\int x_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2\right)dx_1 = -\int\left(-\int \phi dx_2 + x_2\phi\right)dx_1 \\
&= \iint \phi dx_1\, dx_2 - \int x_2\phi\ \ dx_1 = \iint \phi dx_1\, dx_2 + \int x_2\phi \sin\theta_n\, ds
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Como se indica en la **Figura 8.5(b)** los diferenciales dx_2 y dx_1 en el contorno son iguales a:

$$dx_2 = \cos\theta_n\, ds \quad , \quad dx_1 = -\sin\theta_n\, ds \tag{8.23}$$

Por lo tanto la Ecuación (8.20) se reduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
T &= \iint \phi dx_1\, dx_2 - \int x_1\phi \cos\theta_n\, ds + \iint \phi dx_1\, dx_2 + \int x_2\phi \sin\theta_n\, ds \\
&= 2\iint \phi dx_1\, dx_2 + \int \phi(x_2 \sin\theta_n - x_1 \cos\theta_n)\ ds
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Siendo $\tan\theta_n = x_1/x_2$ en el contorno de la barra la segunda integral de la ecuación anterior se anula. En conclusión el momento torsor se puede expresar de la forma:

$$T = 2\iint \phi\, dx_1 dx_2 = 2\int_A \phi\, dA \tag{8.25}$$

De acuerdo con la analogía de la membrana, el momento torsor T es equivalente al doble del volumen que encierra la membrana.

8.8. Barra de sección transversal circular sometida a torsión pura

Una barra prismática de sección transversal circular de radio r, se somete a un par de momentos torsores T en sus extremos de igual magnitud y sentido contrario como lo ilustra la **Figura 8.8(a)**. El eje longitudinal de la barra coincide con la dirección x_3 y la sección transversal está contenida en el plano $x_1 x_2$.

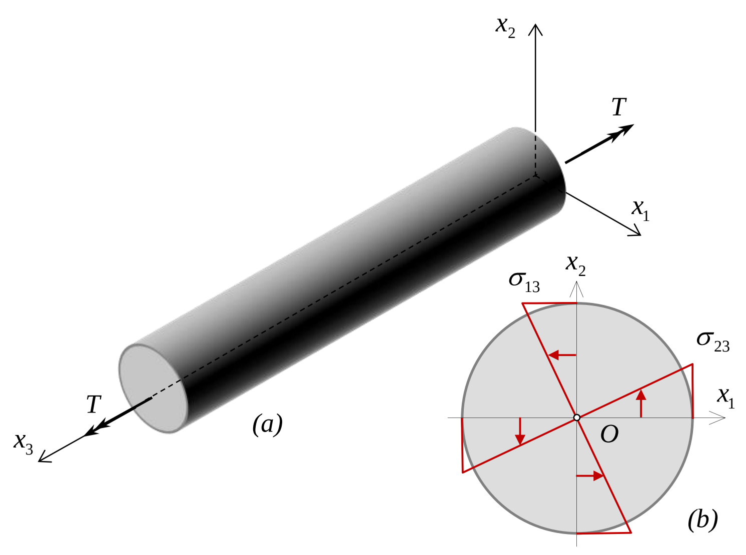


Figura 8.8. Barra de sección transversal circular sometida a torsión pura: (a) esquema general, (b) sección transversal y distribución de esfuerzos cortantes.

Se escoge una función de Prandtl que cumple con la condición de borde $\phi(x_1, x_2) = 0$ para todos los puntos materiales en el contorno de la sección transversal $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, de la forma:

$$\phi(x_1, x_2) = c_1(x_1^2 + x_2^2 - r^2) \tag{8.26}$$

Asimismo, se establece el valor de la constante c_1 sustituyendo la función de Prandtl escogida en la Ecuación (8.12), así:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 2c_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2c_1$$
$$4c_1 + 2\mu\theta = 0 \rightarrow c_1 = -\tfrac{1}{2}\mu\theta \tag{8.27}$$

Como lo indica la Ecuación (8.25), el momento torsor actuante en la barra es el doble de la integral de la función de Prandtl en el área de la sección transversal. Para una sección circular se tiene que:

$$T = -\mu\theta \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2 - x_2^2}}^{\sqrt{r^2 - x_2^2}} (x_1^2 + x_2^2 - r^2)\, dx_1 dx_2 = \mu\theta \frac{\pi r^4}{2} \tag{8.28}$$

La expresión anterior permite establecer una relación entre momento torsor T y el ángulo que gira la sección transversal por unidad de longitud θ, de la forma:

$$T = \mu J \theta \tag{8.29}$$

donde el parámetro J es una propiedad geométrica de la sección transversal conocida como constante torsional. En particular, para barras de sección transversal circular tal parámetro es igual a:

$$J = \frac{\pi r^4}{2} \tag{8.30}$$

y coincide con el momento polar de inercia.

Las componentes de esfuerzo cortante sobre la sección transversal se obtienen sustituyendo en la Ecuación (8.9) a la función de Prandtl obtenida en la Ecuación (8.26), así:

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \mu\theta\, x_1 \quad , \quad \sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\mu\theta\, x_2 \tag{8.31}$$

La distribución de los esfuerzos cortantes sobre los ejes x_1, x_2 se ilustra en la **Figura 8.8(b)**.

8.9. Barra de sección transversal rectangular sometida a torsión pura

Una barra prismática de sección transversal rectangular de base *a* y altura *b*, se somete a un par de momentos torsores T en sus extremos de igual magnitud y sentido contrario como lo ilustra la **Figura 8.9(a)**. El eje longitudinal de la barra coincide con la dirección x_3 y la sección transversal está contenida en el plano $x_1 x_2$.

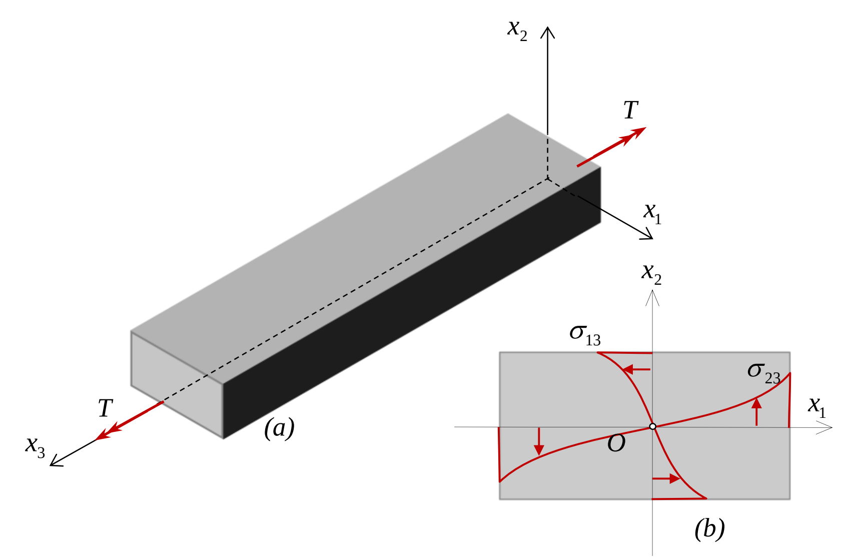


Figura 8.9. Barra de sección transversal rectangular sometida a torsión pura: (a) esquema general, (b) sección transversal y distribución de esfuerzos cortantes.

Se escoge una función de Prandtl que corresponde a una serie infinita que es solución de la ecuación diferencial (8.12), de la forma:

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[Z_n(x_1) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \right] \tag{8.32}$$

donde $Z_n(x_1)$ es una función exclusiva de x_1. La función ϕ adoptada cumple con la simetría esperada con respecto a los ejes x_1 y x_2. Asimismo, tal función es igual a cero en los puntos del contorno $x_2 = \pm \frac{1}{2} b$, y además se cumple que:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \right] = 1 \quad \forall x_2 \,|\, (-\tfrac{1}{2} b < x_2 < \tfrac{1}{2} b) \tag{8.33}$$

A continuación se calculan las segundas derivadas de la función de Prandtl con respecto a x_1 y x_2 y se remplaza al término $2\mu\theta$ por la serie de la ecuación anterior multiplicado por ese mismo factor. Ahora, se sustituyen las expresiones calculadas en la ecuación diferencial (8.12), obteniendo lo siguiente:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left[\frac{\partial^2 Z_n}{\partial x_1^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Z_n + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8\mu\theta}{n\pi} \right] \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \right] = 0 \tag{8.34}$$

Para cumplir la ecuación anterior, se escoge una función $Z_n(x_1)$ que anule los términos $\cos(n\pi x_2 / b)$ para todo *n*. En cosecuencia, la condición se reduce a:

$$\frac{\partial^2 Z_n}{\partial x_1^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} Z_n + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8\mu\theta}{n\pi} = 0 \quad n = 1,3,5,\cdots,\infty \tag{8.35}$$

La ecuación anterior representa un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas en función de x_1, cuya solución general es de la forma:

$$Z_n = c_1 \sinh\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right) + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8\mu\theta b^2}{n^3\pi^3} = 0 \tag{8.36}$$

Las constantes de integración de la función Z_n se obtienen aplicando las siguientes condiciones de borde. La simetría de la superficie alabeada con respecto al centro de torsión *O* requiere que $c_1 = 0$ y un valor de cero de la función de Pradtl para $x_1 = \pm a/2$, establece que:

$$c_2 = -(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8\mu\theta b^2}{n^3\pi^3 \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \tag{8.37}$$

En consecuencia, la función Z_n y la función de Prandtl son iguales a:

$$Z_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8\mu\theta b^2}{n^3\pi^3} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}\right) = 0 \tag{8.38}$$

$$\phi = \frac{8\mu\theta b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)\right] \tag{8.39}$$

Tarea

Referencias

Belytschko, T., Liu, W. K. & Moran, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York, John Wiley and Sons.

Böhm, H. (2000). *A short introduction to basis aspects of continuum micromechanics*. Vienna, Institute of Lightweight Design and Structural Biomechanics. Vienna University of Technology.

Bonet, J. & Wood, R. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite elements analysis*. Cambridge, Cambridge University Press.

Boresi, A., Schmidt, R. & Sidebottom, O. (1993). *Advanced mechanics of materials*, John Wiley & Son.

Feenstra, P. & de Borst, R. (1995). "Constitutive model for reinforced concrete." *Journal of Engineering Mechanics – ASCE* **121**(5): 587-595.

Goicolea, J. (2002). *Mecánica de medios continuos: resumen de álgebra y cálculo tensorial*. Madrid, Universidad Politécnica de Madrid.

Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear solid mechanics*. United Kingdom, John Wiley and Sons.

Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method*. New York, Dover.

Kachanov, L. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers.

Kachanov, L. M. (2004). *Fundamentals of the theory of plasticity*. New York, Dover Publications.

Kojic, M. & Bathe, K. J. (2005). *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Berlin, Springer-Verlag.

Lai, W. & Saibel, E. (1965). *Elements of Mechanics of Elastic Solids*, Addison-Wesley Publishing Company.

Lanczos, C. (1970). *The variational principles of mechanics*, Dover Publications.

Lemaitre, J. (1992). *A course on damage mechanics*, Springer-Verlag.

Linero, D., Oliver, X. & Huespe, A. E. (2007). *A model of material failure for reinforced concrete via continuum strong discontinuity approach and mixing theory*. Barcelona, International Center for Numerical Methods in Engineering.

Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. New York, Macmillan Publishing Company.

Luccioni, B. (2003). *Apuntes de mecánica del daño continuo*, (apuntes de clase).

Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. New Jersey, Prentice-Hall.

Mase, G. T. & Mase, G. E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. London, CRC Press.

Maugin, G. (1992). *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. New York, Cambrige University Press.

Oliver, X. & Agelet, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Barcelona, Edicions UPC.

Oller, S. (2003). *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Barcelona, CIMNE.

Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*. Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Ortiz, L. (1998). *Elasticidad*. Madrid, Mc Graw Hill.

Pietruszczak, S. & Winnicki, A. (2003). "Constitutive model for concrete with embedded sets of reinforcement." *Journal of Engineering Mechanics – ASCE* **129**(7): 725-738.

Popov, E. (1998). *Engineering mechanics of solids*, Prentice-Hall.

Reddy, J. N. (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford, Oxford University Press.

Romero, I. (2004). *Notación indicial*. Madrid, Universidad Politécnica de Madrid.

Runesson, K. (1999). *Constitutive Theory and Computational Technique for Dissipative Materials with emphasis on Plasticity, Viscoplasticity and Damage*. Göteborg.

Runesson, K., Ottosen, N. & Peric, D. (1991). "Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain " *International Journal of Plasticity* **7**: 99 - 121.

Shabana, A. (2008). *Computational Continuum Mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press.

Simó, J. & Hughes, T. H. R. (1998). *Computational Inelasticity*. New York, Springer-Verlag.

Spencer, A. J. M. (1990). *Continuum mechanics*. London, Longman Scientific & Technical.

Timoshenko, S. P. & Goodier, J. (1970). *Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill.

Timoshenko, S. P. & Young, D. H. (1965). *Theory of Structures*, Mcgraw-Hill College.

Truesdell, C. & Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. Berlín.

Vecchio, F. & Collins, M. (1986). "The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear." *ACI Journal* **83**(2): 219-231.

William, K. (2002). Constitutive Models for Engineering Materials. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Academic Press. **3:** 603-633.

Wu, H. (2005). *Continuum Mechanics and Plasticity*. Boca Raton, Charman & Hall / CRC.

Zienkiewicz, O. (1980). *El método de los elementos finitos*. Barcelona, Editorial Reverté.